

К. т. н. И. А. КОННИКОВ

Россия, г. Санкт-Петербург, Государственный институт культуры  
E-mail: konnikov\_i@mail.ru

Дата поступления в редакцию  
30.05 2007 г.

Оппонент д. т. н. В. В. БАРАНОВ  
(БГУИР, г. Минск)

## РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЭЛЕКТРОННЫХ МОДУЛЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛА ЗОММЕРФЕЛЬДА

*Излагается подход с использованием интеграла Зоммерфельда. Метод позволяет избежать интегрирования в комплексной области и снизить объем вычислений по сравнению с известными методами.*

В процессе разработки электронных модулей приходится решать задачу внутренней электромагнитной совместимости. Предложенное в [1] решение основано на решении уравнения Лапласа для электростатического поля в слоистой среде, что значительно сужает область корректного использования полученных в [1] результатов. Дело в том, что изложенный в [1] метод, как и вообще моделирование наводок через паразитные реактивности, принципиально не учитывает поле излучения и переходное поле.

Сущность предлагаемого в настоящей работе подхода — использование аналитических методов расчета **электромагнитного** поля (интеграла Зоммерфельда в сочетании с методом разностной математической модели). Решение ориентировано на проектные задачи большой размерности с использованием аналитического подхода, реализуемого заранее при разработке математических методов и моделей, в отличие от ориентации на численные методы, предполагающие проведение основного и гораздо большего объема вычислений в процессе моделирования. Для получения удовлетворительного решения задачи необходимо прямое использование методов теории электромагнитного поля, адекватно описывающих характер физических процессов в системе, состоящей из канала распространения электромагнитной энергии (канала связи), источника и приемника излучения; поле в такой системе должно описываться волновым уравнением.

Методика решения волнового уравнения для слоистой среды хорошо известна. Решение волнового уравнения относительно поляризационного потенциала в  $v$ -м слое  $\Pi_v$  давно получено и, как известно [2], в случае осевой симметрии задачи описывается интегралом Зоммерфельда:

$$\Pi_v(r, z, z_0) = M \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \Phi_v(\lambda, z, z_0) d\lambda, \quad (1)$$

где  $r$  — радиус в цилиндрической системе координат;  
 $z_0$  и  $z$  — аппликаты элементарного источника излучения и точки, где вычисляется поле, соответственно;  
 $M$  — амплитудный множитель [2, с. 514];  
 $J_0$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  
 $\lambda$  — параметр разделения [3], именуемый в [2, с. 504] параметром разложения;  
 $\Phi_v(\lambda, z, z_0)$  — динамическая математическая модель слоистой среды [4], определяемая на частоте  $\omega > 0$  из граничных условий для поляризационного потенциала на границах раздела слоев [2, с. 503].

Как известно, интеграл Зоммерфельда является практически точной макроскопической математической моделью электромагнитного поля в слоистой среде. Однако применение этой модели нередко осложняется отсутствием адекватных вычислительных технологий. Уже несколько поколений исследователей [2, 3, 5, 7 и др.] отмечают, что интегральное представление решения (1) очень сложно для его практического использования. Известен ряд методов [2, 5—8] приближенного вычисления интеграла (1), требующих достаточно высокой квалификации для их применения, причем получаемые результаты нередко имеют весьма ограниченную область корректного использования (например [2, с. 513]) и в ряде случаев требуют непомерно больших затрат машинного времени. Так, при расчете полей в микросхемах интеграл Зоммерфельда требуется вычислять многократно (сотни и тысячи раз), и даже для проектных задач невысокой размерности при использовании широко доступных вычислительных средств расход машинного времени и требования в отношении емкости оперативной памяти становятся неприемлемо высокими.

### Предлагаемый подход

Описанные трудности при моделировании электромагнитного поля можно значительно снизить, используя эквивалентную постоянную распространения  $k_z$ , которая рассчитывается в квазистационарном приближении через отношение потенциалов, создаваемых источником в слоистой среде и свободном пространстве, и позволяет учитывать влияние неоднородности (слоистости) среды. Такое приближение достаточно корректно, если расстояние между границами раздела крайних слоев, формирующих учитываемую при анализе среду, много меньше длины волны, т. е. при  $|kR| \ll 1$  ( $k$  — постоянная распро-

странения среды,  $R$  — расстояние между элементарным источником поля и точкой, где вычисляется поле) превалирует статическая составляющая поля, обратно пропорциональная кубу расстояния  $R$ .

Функции Грина для электростатической и магнитостатической задач вычисляются достаточно несложно по методике [9,10], разработанной на основе решения уравнения Лапласа. При таком подходе необходимость интегрирования по переменной  $\lambda$  в комплексной области отпадает, и требуемые вычисления кардинально упрощаются. В этом основная идея предлагаемого метода.

Реализацию описанной идеи проиллюстрируем конкретным примером. В рассматриваемом примере будем считать, что источник поля представляет собой вертикальный (т. е. ориентированный параллельно оси аппликаты и перпендикулярно границам раздела слоев) бесконечно тонкий провод. Аппликаты границ проводника-источника длиной  $l_n$  обозначим  $z_n$  и  $z_n+l_n$ ;  $z_n$  и  $z_n+l_n$  — то же для приемника помехи длиной  $l_n$ . Крачайшее расстояние между источником поля и точкой наблюдения в азимутальной плоскости обозначим  $r_a$ .

Значение потенциала  $\Phi_n$ , создаваемого проводом — источником поля, вычисляется интегрированием функции Грина по длине электрода с весом  $\eta(z_0)$ , описывающим распределение зарядов по длине. Это распределение в квазистационарном приближении равномерно [11]. Используя закон сохранения заряда в интегральной форме [12, с. 377], получим, что

$$\eta(z_0) = iI / (\omega l_n), \quad (2)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ;

$I$  — ток в проводнике — источнике помехи;  
 $\omega$  — круговая частота.

Пусть, как предложено выше, локальная эквивалентная относительная диэлектрическая проницаемость равна отношению потенциалов в свободном пространстве и слоистой среде. Тогда с учетом характера функции  $\eta(z_0)$

$$\epsilon_s = \frac{\int_{z_n}^{z_n+l_n} \frac{dz_0}{R} \int_{z_n}^{z_n+l_n} dz_0 \int_0^\infty J_0(\lambda r) q_\epsilon(\lambda) d\lambda}{\int_{z_n}^{z_n+l_n} dz_0 \int_0^\infty J_0(\lambda r) q_\epsilon(\lambda) d\lambda}, \quad (3)$$

где  $R = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}$ ;

$q_\epsilon(\lambda)$  — полученная при решении электростатической задачи математическая модель [4] той среды, которая соответствует математической модели  $\Phi_v$ .

Аналогично локальная эквивалентная относительная магнитная проницаемость

$$\mu_s = \frac{\int_{z_n}^{z_n+l_n} dz_0 \int_0^\infty J_0(\lambda r) q_\mu(\lambda) d\lambda}{\int_{z_n}^{z_n+l_n} \frac{dz_0}{R}}, \quad (4)$$

где  $q_\mu(\lambda)$  — полученная при решении магнитостатической задачи математическая модель [4] той среды, для которой получена модель  $\Phi_v$ .

Локальная постоянная распространения эквивалентной однородной среды  $k_s = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_s \mu_0 \mu_s}$  показывает, как изменяется набег фазы в рассматриваемой

слоистой среде по сравнению со свободным пространством.

С учетом формул (2)—(4) получим:

$$k_s = \omega \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0 \int_{z_n}^{z_n+l_n} dz_0 \int_0^\infty J_0(\lambda r) q_\mu(\lambda) d\lambda}{\int_{z_n}^{z_n+l_n} dz_0 \int_0^\infty J_0(\lambda r) q_\epsilon(\lambda) d\lambda}}. \quad (5)$$

Функция Грина, которая является решением волнового уравнения, для однородной среды со свойствами  $v$ -го слоя имеет вид

$$G_v = \frac{\exp(ik_v R)}{4\pi \epsilon_v R}. \quad (6)$$

Для того чтобы распространение волны по прямому от каждого элементарного источника поля (точки с аппликатой  $z_0$ ) в точку наблюдения с координатами  $\{r_a, z_n\}$  и  $\{r_a, z_n+l_n\}$  можно было аппроксимировать выражением (6) для однородной среды, необходимо характеризовать слоистую среду неизменным (интегральным) значением постоянной распространения  $k_s$ .

Потребуем, чтобы постоянная распространения  $k_s$  обеспечивала в точке наблюдения такой же набег фазы, как и зависящая от координат локальная постоянная  $k_n$ , вычисляемая по формуле (5). Разделим расстояние  $R_{0n}$  между элементарным источником поля (точкой с аппликатой  $z_0$ ) и точкой наблюдения (точкой с аппликатой  $z_n$ ) на малые отрезки  $\Delta R$ . Набег фазы в среде с постоянной  $k_n$  на расстоянии  $\Delta R$  равен  $k_n \Delta R$ . Устремив максимальный из отрезков  $\Delta R$  к нулю и перейдя к пределу, получим, что набег фазы  $\alpha_R$  на расстоянии  $R_{0n}$  равен линейному интегралу вдоль отрезка прямой, соединяющего названные точки:

$$\alpha_R = \int_0^{R_{0n}} k_s(R) dR = \frac{\omega R_{0n}}{r_a} \int_0^{r_a} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0 \int_{z_n}^{z_n+l_n} dz_0 \int_0^\infty J_0(\lambda r) q_\mu(\lambda) d\lambda}{\int_{z_n}^{z_n+l_n} dz_0 \int_0^\infty J_0(\lambda r) q_\epsilon(\lambda) d\lambda}} dr, \quad (7)$$

где  $R_{0n} = \sqrt{r_a^2 + (z_n - z_0)^2}$ ;  $z = z_0 + r(z_n - z_0)/r_a$ .

Отсюда постоянная  $k_s = \alpha_R/R_{0n}$ ; от  $z_0$  она не зависит. Более подробно расчет эквивалентной постоянной распространения  $k_s$  рассмотрен ниже.

На азимутальном расстоянии  $r$  в точке с аппликатой  $z$  потенциал

$$\Phi_n(r, z) = \int_{z_n}^{z_n+l_n} G_v(z_0) \eta(z_0) dz_0 = \frac{iI}{4\pi \epsilon_v \omega l_n} \int_{z_n}^{z_n+l_n} \frac{\exp(ik_s R)}{R} dz_0.$$

Заменяя экспоненту первыми четырьмя членами ряда Маклорена (что вполне достаточно для электрически коротких проводников и малых расстояний микроэлектроники) и проинтегрировав, получим:

$$\varphi_n(r, z) = iI [I_0(l_n, z_n) + ik_3 I_1(l_n, z_n) - k_3^2 I_2(l_n, z_n) - ik_3^3 I_3(l_n, z_n)] / (4\pi\epsilon_v \omega l_n), \quad (8)$$

где функции

$$I_0(l_n, z_n) = \text{Arsh} \frac{z_n + l_n - z}{r} + \text{Arsh} \frac{z - z_n}{r};$$

$$I_1(l_n, z_n) = l_n;$$

$$I_2(l_n, z_n) = [r^2 I_0 + (z - z_n) \sqrt{r^2 + (z - z_n)^2} + (z_n + l_n - z) \sqrt{r^2 + (z_n + l_n - z)^2}] / 4;$$

$$I_3(l_n, z_n) = r^2 l_n / 6 + [(z - z_n)^3 + (z_n + l_n - z)^3] / 18.$$

Задача решена в общем виде, однако описанная методика имеет значительный резерв повышения точности по сравнению с изложенным иллюстрационным вариантом.

#### Использование разностной математической модели среды

Точность предлагаемой методики вычисления можно значительно повысить, если воспользоваться тем обстоятельством, что поле в слое, где расположен канал распространения энергии, определяется в основном физическими характеристиками этого слоя; поле вблизи границы раздела определяется в основном физическими характеристиками слоев, прилегающих к границе раздела. Влияние остальных слоев существенно ниже, особенно на малых расстояниях  $r$ , характерных для приборостроения и микроэлектроники. Для каналов связи, содержащих провод, этот феномен усиливается вследствие внешнего скин-эффекта [13, с. 259], т. е. эффекта концентрации внешнего поля около поверхности провода.

С учетом этого поле в слоистой среде можно рассчитывать, представив выражение (1) с помощью простейшего тождественного преобразования в виде главной составляющей (легко вычисляемой и дающей основной вклад в формирование поля) и части, вычисляемой приближенно:

$$\begin{aligned} \Pi_v(r, z, z_0) &= \\ &= \Pi_{v\Gamma}(r, z, z_0) + M \int_0^\infty J_0(\lambda r) \Omega_p(\lambda, z, z_0) d\lambda, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\Pi_{v\Gamma}$  — главная составляющая;

$\Omega_p(\lambda, z, z_0)$  — разностная математическая модель среды, позволяющая учесть влияние факторов, не учтенных главной составляющей,

$\Omega_p(\lambda, z, z_0) = \Phi_v(\lambda, z, z_0) f(\lambda, z, z_0)$ ;  $f(\lambda, z, z_0)$  определяется аналогично  $\Phi_v(\lambda, z, z_0)$  для физической модели среды, которая соответствует главной составляющей.

Используя формулу [2, с. 509], решение волнового уравнения для поляризованного потенциала поля

у плоской границы раздела двух однородных полупространств несложно привести к виду

$$\Pi_\Gamma(r, z, z_0) = \Pi_{v\Gamma}(r, z, z_0) + \frac{iI dz_0}{4\pi\omega\epsilon_v} \xi(r, z, z_0),$$

где  $\Pi_{v\Gamma}$  — главная составляющая, которая описывает поле диполя и его зеркального изображения в однородной среде со свойствами верхнего полупространства,

$$\Pi_{v\Gamma} = \frac{iI dz_0}{4\pi\omega\epsilon_v} \left[ \frac{\exp(ik_v R_v)}{R_v} + \frac{\exp(ik_v R_{v-1})}{R_{v-1}} \right];$$

$dz_0$  — длина элементарного диполя;

$k$  — постоянная распространения электромагнитной волны в среде, где вычисляется поле,

$$k = \sqrt{\mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega};$$

$\epsilon, \mu, \sigma$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость, абсолютная магнитная проницаемость и удельная активная проводимость среды, соответственно;

$R_v, R_{v-1}$  — расстояния от точки, где вычисляется поле, до диполя и его зеркального изображения, соответственно; индекс  $v-1$  при величинах  $R, \epsilon, \mu, \sigma, k$  указывает на их принадлежность нижнему полупространству (под границей раздела), индекс  $v$  — верхнему полупространству;

$\xi$  — несобственный интеграл, через известные функции в явном виде не выражается;

$$\begin{aligned} \xi(r, z, z_0) &= 2 \int_0^\infty J_0(\lambda r) \exp[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2 - k_v^2}] \times \\ &\times \left( \frac{k_{v-1}^2}{k_{v-1}^2 \sqrt{\lambda^2 - k_v^2} + k_v^2 \sqrt{\lambda^2 - k_{v-1}^2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_v^2}} \right) \lambda d\lambda. \end{aligned}$$

Значение  $\Pi_{v\Gamma}$  (главной составляющей поляризованного потенциала) легко вычисляется и дает основной вклад в результат, особенно при  $|k_{v-1}^2| \gg |k_v^2|$ , что обычно имеет место на практике. Все остальные составляющие потенциала  $\Pi_{v\Gamma}$  объединены в один интеграл — второе слагаемое выражения (9), значение которого (поправку) приходится вычислять приближенно, с помощью эквивалентной постоянной распространения  $k_3$ .

Теперь необходимо конкретизировать некоторые аспекты вычисления эквивалентной (интегральной) постоянной распространения слоистой среды.

#### Расчет эквивалентной постоянной распространения

Постоянная распространения  $k_3$  рассчитывается на основе вычисления интеграла

$$G = \int_0^\infty J_0(\lambda r) q(\lambda, z, z_0) d\lambda,$$

в котором функция  $q = q_\mu$  для числителя в формуле (3) и  $q = q_\epsilon$  для знаменателя.

Для вычисления этого интеграла его следует представить в виде

$$G = G_1 + G_2, \quad (10)$$

$$\text{где } G_1 = \sum_{v=1}^N \int_{\lambda_{v-1}}^{\lambda_v} J_0(\lambda r) q(\lambda, z, z_0) d\lambda;$$

$N$  — целое число полувольт функции Бесселя, при данном  $r$  укладывающихся на интервале  $[0, \lambda_N]$ ;

$\lambda_v = \alpha_v / r$ ;

$\alpha_v$  — нули функции Бесселя  $J_0$ ;

$$\lambda_0 = 0;$$

$$G_2 = \int_{\lambda_N}^{\infty} J_0(\lambda r) q(\lambda, z, z_0) d\lambda.$$

Число  $N$  выбирается так, чтобы при любых  $z$  и  $z_0$ , соответствующих интервалу их значений в решаемой задаче, выполнялось условие

$$q(\lambda_N, z, z_0) = q_{\infty}, \quad (11)$$

где  $q_{\infty} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} q(\lambda, z, z_0)$ ; значения  $N$  и  $\lambda_N$  для обеих функций  $q$  одинаковы.

На практике условие (11) можно выполнить с любой требуемой точностью. Тогда величину  $G_2$  можно выразить через  $\Theta(\lambda_N r)$  — значение  $\Theta$ -функции [1] аргумента  $\lambda_N r$ :

$$G_2 = q_{\infty} \Theta(\lambda_N r). \quad (12)$$

Значение  $\Theta$ -функции при таком значении аргумента не обязательно равно нулю, однако в подавляющем большинстве случаев практики интегралом  $G_2$  можно пренебречь по двум причинам. Во-первых, в результате последующего интегрирования функции Грина по координатам в подынтегральном выражении для  $G_2$  в (6) неизбежно появляется множитель  $1/\lambda^n$ , где  $n$  — кратность интегрирования<sup>1</sup>, и при больших  $\lambda$  подынтегральная функция быстро убывает вместе с  $G_2$  по абсолютной величине. Во-вторых, при больших значениях аргумента  $\lambda_N r$  значение  $\Theta$ -функции  $\Theta(\lambda_N r)$  невелико [1], и для слоистых сред с плоскопараллельными и неограниченными в азимутальном направлении слоями обычно<sup>2</sup>  $q_{\infty} = 0$ .

Впрочем, полагать  $G_2 = 0$  совсем не обязательно. Поскольку соотношение (11) можно обеспечить с любой требуемой точностью, значение  $G_2$  легко вычисляется по формуле (12) через асимптотическое значение  $q_{\infty}$  функции  $q(\lambda)$  и значение  $\Theta$ -функции [1].

Учитывая специфику функции Бесселя первого рода, для вычисления  $G_1$  в выражении (10) интервал интегрирования целесообразно разбить на  $N$  шагов и на каждом шаге использовать квадратурную формулу Лобатто [14, с. 258] с тремя узлами, два из которых расположены на границах шага интегрирования. Алгебраическая степень точности такой формулы равна 3, что вполне достаточно. Поскольку границы шагов интегрирования совпадают с нулями функции Бесселя, отличным от нуля и подлежащим учету на каждом шаге будет из трех лишь одно слагаемое используемой квадратурной формулы, что позволяет значительно сократить объем вычислений. Выражение для  $G_1$  в (6) примет вид

<sup>1</sup> Так, после интегрирования по  $z$  и  $z_0$  в первообразной функции появляется множитель  $1/\lambda^2$ .

<sup>2</sup> Строгое теоретическое доказательство этого соотношения для общего случая не проводилось, однако методами вычислительного эксперимента удалось обнаружить лишь один класс функций  $q$ , для которых  $q_{\infty} \neq 0$ , а именно — класс функций для вычисления полей в плоскости источника, параллельного границам раздела слоев ( $z \equiv z_0$ ). В этом случае поле вычисляется по методике [3] через нули  $\Theta$ -функции. При  $q_{\infty} \neq 0$  применение предлагаемой методики также возможно, однако ее экономичность несколько снижается.

$$G_1 = \frac{4}{3} \sum_{v=1}^N \lambda_{v2} J_0(\lambda_{v2} r) q(\lambda_{v2}, z, z_0),$$

где  $\lambda_{v2} = (\lambda_v - \lambda_{v-1})/2$ ;  $\lambda_{12} = 1,202412779$  [15, с. 227].

При вычислении поправки  $\Delta\Phi_{\Pi}(z_{\Pi}, r_a)$  в точке с аппликатой  $z = z_{\Pi}$  формула (3) примет вид

$$\alpha_R = \frac{\omega R_{0\Pi}}{r_a} \times$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0 \int_{z_{\Pi}}^{z_{\Pi}+l_n} \sum_{v=1}^N \lambda_{v2} J_0(\lambda_{v2} r) q_{\mu}(\lambda_{v2}, z_{\Pi}, z_0) dz_0}{\int_{z_{\Pi}}^{z_{\Pi}+l_n} \sum_{v=1}^N \lambda_{v2} J_0(\lambda_{v2} r) q_{\varepsilon}(\lambda_{v2}, z_{\Pi}, z_0) dz_0}} dr. \quad (13)$$

Дробь под знаком радикала в формуле (13) особенностей не имеет, и интегрирование по переменной  $r$  несложно выполнить при помощи одной из известных приближенных квадратурных формул, которые точны для алгебраических многочленов третьей степени, в том числе с помощью формулы Гаусса [14] или формулы Лобатто, использованной выше.

Для малых расстояний  $r$  можно положить  $N=1$ , и формула (13) существенно упрощается:

$$\alpha_R = \omega R_{0\Pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0 \int_{z_{\Pi}}^{z_{\Pi}+l_n} q_{\mu}(\lambda_{12}, z_{\Pi}, z_0) dz_0}{\int_{z_{\Pi}}^{z_{\Pi}+l_n} q_{\varepsilon}(\lambda_{12}, z_{\Pi}, z_0) dz_0}}. \quad (14)$$

При  $N=1$  как числитель, так и знаменатель, будут иметь завышенные значения. Поскольку знаки погрешностей одинаковы, при вычислении дроби эти погрешности отчасти взаимно компенсируются, причем степень компенсации тем выше, чем ближе свойства среды к свойствам свободного пространства.

Отсюда для поля, распространяющегося на расстоянии  $R_{0\Pi}$ , эквивалентная постоянная распространения  $k_3 = \alpha_R / R_{0\Pi}$ . Из выражения (13) нетрудно видеть, что постоянная  $k_3$  от аппликаты  $z_0$  не зависит. В случае цилиндрической или плоской волны  $k_3 = \alpha / r_a$ .

При использовании разностной математической модели среды  $\Omega_r(\lambda, z, z_0)$  изложенная методика относится к вычислению поправки. Рассмотрим вычисление главной составляющей помехи.

### Вычисление главной составляющей

Поляризованный потенциал поля связан со скалярным потенциалом известным соотношением [3, с. 444]. Главная составляющая скалярного потенциала поля в  $v$ -м слое вычисляется с помощью интеграла по объему объекта — источника поля:

$$\Phi_{\Gamma}(r, z) = - \iint_{S_{\Pi}} \eta(x_0, y_0) ds \int_{z_{\Pi}}^{z_{\Pi}+l_n} \operatorname{div} \Pi_{\Gamma},$$

где  $S_{\Pi}$  — площадь поперечного сечения источника;  $\eta(x_0, y_0)$  — плотность распределения заряда по площади  $S_{\Pi}$ ;  $ds$  — элемент площади  $S_{\Pi}$  в прямоугольных координатах;  $x_0, y_0$  — абсцисса и ордината источника.

В случае когда диаметр<sup>3</sup> провода-источника мал по сравнению с его длиной и с расстоянием между источником и приемником  $r_a$ , практически без потери точности источник можно считать нитевидным, и тогда

$$\Phi_{\Gamma}(r, z) = - \int_{z_n}^{z_n+l_n} \text{div } \Pi_{v\Gamma}.$$

При формировании разностной математической модели среды было принято, что главная составляющая  $\Pi_{v\Gamma}$  в формуле (5) представляет собой сумму двух экспонент. Поскольку главная составляющая поляризованного потенциала  $\Pi_{v\Gamma}$  имеет только одну компоненту, ориентированную вдоль оси аппликат, то, выполнив дифференциальную операцию векторного анализа, заменив указанные экспоненты первыми четырьмя членами ряда Маклорена и проинтегрировав по  $z_0$ , после приведения подобных членов для нитевидного проводника-источника получим:

$$\Phi_{\Gamma}(r, z) = \frac{iI}{4\pi\omega\epsilon_v} \{ I_4(l_n, z_n, r, z) - I_4(-l_n, -z_n, r, z) - ik_v I_5(r, z) + k_v^2 [I_6(l_n, z_n, r, z) - I_6(-l_n, -z_n, r, z)] - ik_v^3 I_7(r, z) - k_v^4 [I_8(l_n, z_n, r, z) - I_8(-l_n, -z_n, r, z)] \}, \quad (15)$$

где

$$I_4(l_n, z_n, r, z) = 1/\sqrt{r^2 + (z_n + l_n - z)^2} - 1/\sqrt{r^2 + (z_n - z)^2};$$

$$I_5(r, z) = \ln \frac{[r^2 + (z_n + l_n - z)^2][r^2 + (z_n + z)^2]}{[r^2 + (z_n - z)^2][r^2 + (z_n + l_n + z)^2]};$$

$$I_6(l_n, z_n, r, z) = 3[\sqrt{r^2 + (z_n + l_n - z)^2} - \sqrt{r^2 + (z_n - z)^2}]/2;$$

$$I_7(r, z) = -4zl_n/3;$$

$$I_8(l_n, z_n, r, z) = \{ \sqrt{[r^2 + (z_n + l_n - z)^2]^3} - \sqrt{[r^2 + (z_n - z)^2]^3} \} / 18.$$

Задача несколько усложняется, если поперечный размер источника имеет тот же порядок, что и расстояние  $r_a$  (как это может иметь место в случае переключек межслойной коммутации или при вычислении коэффициента передачи канала связи); тогда выражения (15) должны быть проинтегрированы по площади поперечного сечения  $s$ , что, впрочем, не может вызвать принципиальных затруднений. Если же источник и приемник поля имеют одинаковый поперечный размер  $t$  (в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны), то для учета поперечного размера канала связи  $t$  и усреднения потенциала вдоль этого же направления двукратное интегрирование можно провести, исполь-

<sup>3</sup> Провод-источник не обязательно является круглым, и под диаметром понимается наибольшая из хорд его поперечного сечения.

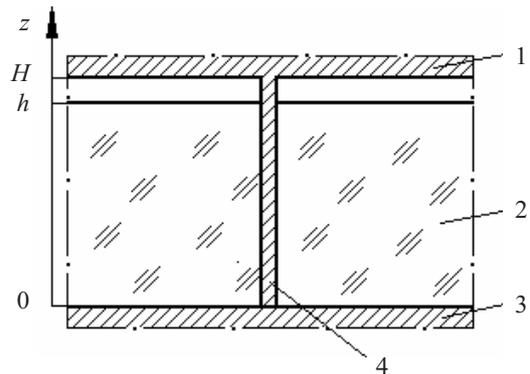
зуя метод средних геометрических расстояний (СГР), что позволит существенно упростить выражение для потенциала. При вычислении таких интегралов метод СГР обеспечивает высокую точность, если максимальный размер области, где вычисляется поле, превосходит интервал интегрирования хотя бы на десятичный порядок [16]; такое соотношение обычно выполняется.

Примем такую ориентацию системы координат, при которой источник и приемник поля расположены на оси абсцисс. Тогда, проинтегрировав  $-\text{div}\Pi_{v\Gamma}$  по  $z_0$  аналитически, а по ординатам  $y$  и  $y_0$  — при помощи метода СГР, получим, что потенциал поля в  $v$ -м слое описывается формулами (8), (15), в которых

$r = r_x = \sqrt{(x - x_0)^2 + t_c^2}$ ; СГР отрезка прямой, который имеет длину  $t$ , от самого себя  $t_c = t \cdot \exp(-3/2)$ .

### Пример использования методики

Рассмотрим возможность расчета поля в точке с аппликатой  $z=z_n$ , создаваемого вертикальным цилиндрическим выводом в конструкции, схематично представленной на рисунке. Диэлектрики с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  полагаем непроводящими и немагнитными, верхний и нижний слои — идеально проводящими.



Физическая модель слоистой диэлектрической структуры с вертикальным излучателем:

1 — металлический корпус; 2 — несущий немагнитный диэлектрик (плата); 3 — заземляющая плоскость; 4 — заземляющий вывод

Вычисление главной составляющей поля  $\Phi_{\Gamma}$  проводится очевидным образом по формулам (15). Рассмотрим вычисление поправки.

При расчете эквивалентной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_v$  в качестве главной составляющей примем потенциал поля диполя и его зеркального изображения в однородной среде со свойствами верхнего полупространства. Следуя методике работ [1, 16, 17], при решении электростатической задачи потенциал электрического поля в верхнем слое структуры, представленной на рисунке, будем описывать с помощью математической модели

$$\Phi_{\phi_2}(\lambda, z, z_0) = \exp(-\lambda |z - z_0|) + s_2(\lambda) \exp[\lambda(z - z_0)] + p_2(\lambda) \exp[\lambda(z_0 - z)],$$

а потенциал поля в нижнем слое структуры — с помощью математической модели

$$\Phi_{\phi_1}(\lambda, z, z_0) = s_1(\lambda) \exp[\lambda(z-z_0)] + p_1(\lambda) \exp[\lambda(z_0-z)].$$

Записав с помощью этих выражений граничные условия [16], получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных  $s_v(\lambda)$  и  $p_v(\lambda)$  ( $v=1, 2$ ); число уравнений необходимо и достаточно для отыскания всех неизвестных функций  $s$  и  $p$ .

С помощью интеграла Фурье–Бесселя [3] переходим к системе линейных алгебраических уравнений; тогда граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} s_2(\lambda) \exp[\lambda(H-z_0)] + p_2(\lambda) \exp[\lambda(z_0-H)] + \\ + \exp(\lambda |H-z_0|) = 0; \\ s_2(\lambda) \exp[\lambda(h-z_0)] + p_2(\lambda) \exp[\lambda(z_0-h)] + \\ + \exp(-\lambda |h-z_0|) = s_1(\lambda) \exp[\lambda(h-z_0)] + p_1(\lambda) \exp[\lambda(z_0-h)]; \\ s_1(\lambda) \exp(-\lambda z_0) + p_1(\lambda) \exp(\lambda z_0) = 0; \\ \epsilon_2 \{s_2(\lambda) \exp[\lambda(h-z_0)] - p_2(\lambda) \exp[\lambda(z_0-h)] + \\ + \exp(-\lambda |h-z_0|)\} = \epsilon_1 \{s_1(\lambda) \exp[\lambda(h-z_0)] - \\ - p_1(\lambda) \exp[\lambda(z_0-h)]\}. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, получим, что

$$s_2 = \frac{2\epsilon_2}{(\epsilon_1 D - \epsilon_2) \{ \exp[2\lambda(h-z_0)] + \exp(-2H) \}}, \quad (16)$$

$$\text{где } D = \frac{1 + \exp(-2h)}{1 - \exp(-2h)} \cdot \frac{1 - \exp[2\lambda(H-h)]}{1 + \exp[2\lambda(H-h)]};$$

$$p_1 = -s_2 \frac{1 - \exp[2\lambda(H-h)]}{1 + \exp[2\lambda(H-h)]}; \quad (17)$$

$$s_1 = -p_1 \exp(-2\lambda z_0); \quad (18)$$

$$p_2 = -s_2 \exp[2\lambda(H-z_0)] - 1. \quad (19)$$

Выделив с помощью тождества Вебера–Липшица [16] главные составляющие потенциалов, получим, что для расчета эквивалентной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_3$  надо использовать формальную разностную математическую модель среды

$$q_{\epsilon_1}(\lambda) = s_1(\lambda) \exp[\lambda(z-z_0)] + p_1(\lambda) \exp[\lambda(z_0-z)] - \\ - \exp(-\lambda |z+z_0|) - \exp(-\lambda |z-z_0|)$$

для нижнего слоя, а для верхнего слоя — формальную математическую модель

$$q_{\epsilon_2}(\lambda) = s_2(\lambda) \exp[\lambda(z-z_0)] + p_2(\lambda) \exp[\lambda(z_0-z)] - \\ - \exp(-\lambda |z+z_0|).$$

Эти модели вычисляются с помощью формул (16)–(19).

Формирование разностной математической модели конструкции для расчета эквивалентной магнитной проницаемости  $\mu_3$  проводим аналогично. Поскольку оба слоя считаются немагнитными, при расчете  $\mu_3$  используется только одна разностная математическая модель. Вектор-потенциал поля в квазистационарном приближении для обоих слоев структуры, представленной на рисунке, будем описывать с помощью функции

$$\Phi_A(\lambda, z, z_0) = p(\lambda) \exp[\lambda(z_0 - z)] + \\ + s(\lambda) \exp[\lambda(z - z_0)] + \exp(-\lambda |z - z_0|),$$

$$\text{где } p(\lambda) = \frac{1 - \exp(-\lambda H)}{\exp[\lambda(H + z_0)] - 1} - \exp(-\lambda H);$$

$$s(\lambda) = \frac{1 - \exp(-\lambda H)}{\exp(-2\lambda z_0) - \exp[\lambda(H - z_0)]}.$$

Выделив с помощью тождества Вебера–Липшица главные составляющие вектор-потенциала, получим, что для расчета эквивалентной магнитной проницаемости надо использовать формальную математическую модель

$$q_\mu(\lambda) = p(\lambda) \exp[\lambda(z_0 - z)] + \\ + s(\lambda) \exp[\lambda(z - z_0)] - \exp(-\lambda |z + z_0|).$$

Поскольку диэлектрическая проницаемость меняется вдоль оси аппликата, с учетом обозначений координат на рисунке и формулы (14) выражение для постоянной распространения  $k_y$  примет вид

$$k_y = \omega \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0 \int_{H-l}^H q_\mu(\lambda_{12}, z_i, z_0) dz_0}{\int_{H-l}^h q_{\epsilon_1}(\lambda_{12}, z_i, z_0) dz_0 + \int_h^H q_{\epsilon_2}(\lambda_{12}, z_i, z_0) dz_0}}. \quad (20)$$

Интегралы в формуле (20) легко вычисляются с помощью квадратурной формулы Гаусса на два узла [14]. Потенциал  $\Phi_n$  вычисляется по формуле (8). В результате потенциал поля может быть рассчитан как сумма парциальных потенциалов:  $\Phi = \Phi_n + \Phi_r$ .

Задача решена.

### Заключение

Описанный подход к вычислению интегралов Зоммерфельда позволяет модифицировать изложенный в [1] метод и существенно расширить частотный диапазон моделирования электромагнитных помех по сравнению с указанным методом. Модифицированный метод позволяет учитывать поле излучения и переходное поле и может быть использован вплоть до диапазона сантиметровых волн и субнаносекундных длительностей импульсов.

Предлагаемый подход может применяться для математического моделирования поля произвольно ориентированных излучателей в тонкопленочных и толстопленочных микросхемах и на печатных платах, изготавливаемых на основе непроводящих материалов, и может быть легко модифицирован для сред, включающих проводящие слои, на основе которых изготавливаются полупроводниковые микросхемы.

### ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Конников И. А. Взаимовлияние объектов малых размеров в микросхеме // Технология и конструирование в электронной аппаратуре (ТКЭА).— 2006.— № 6.— С. 9—14.
2. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма.— М., Л.: ОГИЗ, 1948.

3. Конников И. А. Математическая модель конструкции микросхемы // Математическое моделирование.— 2007.— Т. 19, № 4.— С. 37—44.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1977.
5. Агапов С. В., Чермошнцев С. Ф. Методы и средства анализа и прогнозирования электромагнитных излучений от электронных средств // Информационные технологии.— 2003.— № 11.— С. 2—12.
6. Кинг Р., Смит Г. Антенны в материальных средах.— М.: Мир, 1984.
7. Кюрчан А. Г. Представления Релея и Зоммерфельда для дифрагированных полей и области их сходимости // Радиотехника и электроника.— 1982.— № 2.— С. 233—240.
8. Baños A., Jr. Dipole radiation in the presence of a conducting half-space.— Oxford, London, Edinburgh, New York, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1966.
9. Конников И. А. Два способа вычисления функции Грина для уравнения Лапласа // Прикладная физика.— 2007.— № 2.— С. 17—24.
10. Конников И. А. Индуктивность пленочных проводников в слоистых средах // Судостроение.— 1981.— № 11.— С. 27—28.
11. Конников И. А. Влияние плотности распределения заряда на емкость прямоугольной пленки в слоистой среде // Электричество.— 2007.— № 3.— С. 37—41.
12. Каплянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С. Теоретические основы электротехники.— М.: Высш. школа, 1972.
13. Зоммерфельд А. Электродинамика.— М.: Иностранная литература, 1958.
14. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию.— М.: Наука, 1966.
15. Справочник по специальным функциям // Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.
16. Конников И. А. Емкость тонкого проводника прямоугольного сечения в микросхеме // Технология и конструирование в электронной аппаратуре (ТКЭА).— 2006.— № 4.— С. 18—23.
17. Конников И. А. Расчет сопротивления заземляющего вывода // Технологии электромагнитной совместимости.— 2007.— № 1.— С. 11—16.

НОВЫЕ КНИГИ

НОВЫЕ КНИГИ



**Климачев И. И., Иовдальский В. А. Основы технологии и конструирования ГИС СВЧ-диапазона.— М.: Техносфера, 2006.— 352 с.**

Представленная монография основана на современных представлениях о технологии изготовления и конструкторско-технологическом проектировании гибридных интегральных схем (ГИС) и микросборок (МСБ) СВЧ-диапазона. В книге изложены перспективные конструкторско-технологические решения, позволяющие по сравнению с традиционными улучшить электрические, тепловые, надежностные и массогабаритные характеристики ГИС и МСБ СВЧ-диапазона и модулей на их основе. Она основана на практических и теоретических результатах, полученных авторами в результате многолетней работы в данном направлении.

Книга предназначена для специалистов, занимающихся разработкой модулей на основе ГИС и МСБ СВЧ-диапазона, а также специалистов-технологов серийного производства. Она также полезна для аспирантов и студентов высших и средних учебных заведений электронных и радиотехнических специальностей.

НОВЫЕ КНИГИ



**Ворона В. А. Радиопередающие устройства. Основы теории и расчета: Учебное пособие для вузов.— М.: Горячая линия—Телеком, 2007.— 384 с.**

В первой части изложены теория и практические особенности построения и применения основных каскадов радиопередающих устройств на полупроводниковых приборах: усилителей мощности, автогенераторов, умножителей частоты и модуляторов. Рассмотрены вопросы реализации автогенераторов и усилителей мощности на СВЧ-приборах: клистронах, магнетронах и лампах бегущей волны. Определены перспективы развития техники радиопередающих устройств различного целевого назначения. Во второй части обобщены методические подходы и конкретные методики расчета параметров структурных схем и каскадов радиопередатчиков. Приведены численные примеры расчета, позволяющие сравнить оцениваемые элементы и характеристики отдельных каскадов в различных режимах их применения.

Для студентов, обучающихся по специальностям «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», «Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем» и «Компьютерная безопасность». Может быть полезна разработчикам и пользователям радиопередающих устройств в системах и сетях передачи информации.