

К. ф.-м. н. А. Б. КОЗИН, к. т. н. Л. А. ДОВНАРОВИЧ,
к. т. н. И. А. ДАНИЛЮК, к. ф.-м. н. О. Б. ПАПКОВСКАЯ

Украина, Одесский институт Сухопутных войск, Одесский
национальный политехнический университет
E-mail: leodov@mail.ru

Дата поступления в редакцию
25.07—31.10 2003 г.

Оппонент к. ф.-м. н. В. В. КОВАЛЬЧУК
(ЮГПУ им. К. Д. Ушинского, г. Одесса)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СЛОЖНЫХ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Предложена методика решения дискретно-непрерывной граничной задачи для проведения точных тепловых расчетов в нерегулярных и композиционных средах.

Значительный рост мощности электронных, энергетических и других устройств характеризуется одновременным уменьшением их габаритов. Вместе с тем надежность работы, стабильность функционирования различных устройств напрямую определяется точностью задания их тепловых режимов. Это обусловило актуальность исследования тепловых процессов в сложных системах и повышения точности их расчетов при ограничении ресурсов ЭВМ.

Особую актуальность приобретает исследование дискретно-непрерывных граничных задач, которые являются математической моделью теплопереноса в тех случаях, когда физические параметры исследуемой среды не являются постоянными для всей области ее определения, а зависят от координат.

В данной работе предполагается, что в исследуемой однородной среде (пластине) имеются расположенные произвольным образом непересекающиеся криволинейные неоднородности (дефекты) общего вида, т. е. вызывающие скачки как температуры, так и теплового потока.

Предлагается общий подход к решению таких задач, основанный на применении метода обобщенных интегральных преобразований.

1. Теплопроводность пластины с тонким криволинейным и произвольно ориентированным источником (включением). Общая теория метода

Рассмотрим краевую задачу теплопроводности пластины с тонким криволинейным и произвольно ориентированным источником. Изложим общую теорию метода решения задачи методом обобщенных интегральных преобразований.

Для вывода разрешающего уравнения без ограничения общности полагаем, что рассматриваемая область бесконечная, а искомая функция $W(x, y)$ и ее первая производная равны нулю, когда x и y стремятся к бесконечности.

Вне источника задача формулируется следующим образом.

$$\Delta W(x, y) = 0 \quad (-\infty < x, y < \infty); \quad (1)$$

$$\text{при } x \rightarrow \infty \quad \frac{\partial^i W}{\partial x^i} \rightarrow 0 \quad (i = 0, 1); \quad (2)$$

$$\text{при } y \rightarrow \infty \quad \frac{\partial^i W}{\partial y^i} \rightarrow 0 \quad (i = 0, 1). \quad (3)$$

Внутри области на линии $y=f(x)$ ($c_1 \leq x \leq c_2$), или, что то же самое, $x=f^{-1}(y)$ ($c_3 \leq y \leq c_4$), имеется тепловой источник общего вида. Под последним будем понимать линию L , на которой терпит разрыв сама функция W и ее производные $\frac{\partial W}{\partial x}$ и $\frac{\partial W}{\partial y}$ вдоль осей x и y , соответственно:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= w(x, f(x)-0) - w(x, f(x)+0); \\ \mu_1(x) &= \frac{\partial w}{\partial y}(x, f(x)-0) - \frac{\partial w}{\partial y}(x, f(x)+0); \\ w_1(x) &= \mu_1(x) = 0, \text{ если } x \notin [c_1, c_2]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} w_2(y) &= w(f^{-1}(y)-0, y) - w(f^{-1}(y)+0, y); \\ \mu_2(y) &= \frac{\partial w}{\partial x}(f^{-1}(y)-0, y) - \frac{\partial w}{\partial x}(f^{-1}(y)+0, y); \\ w_2(y) &= \mu_2(y) = 0, \text{ если } y \notin [c_3, c_4]. \end{aligned} \quad (5)$$

Применим теперь к (1) преобразование Фурье по переменной y с ядром $\exp(i\beta y)$. С учетом граничных условий (3) и равенств (4) получим:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \beta^2 \right) w_\beta(x) + \mu_1(x) \exp(i\beta f(x)) - i\beta w_1(x) \exp(i\beta f(x)) = 0, \quad (6)$$

где $w_\beta(x)$ — трансформанта Фурье функции $w(x, y)$.

Применяя формулу обращения этого преобразования к (6), приходим к следующему уравнению:

$$\Delta \bar{w}(x, y) + \mu_1(x) \delta(y - f(x)) + w_1(x) \delta'(y - f(x)) = 0.$$

То есть получено уравнение относительно функции $\bar{w}(x, y)$, совпадающей с $w(x, y)$ при $(x, y) \notin L$ и непрерывной во всей области определения вместе со своей первой производной по переменной y .

Аналогично применим к последнему уравнению преобразование Фурье по переменной x . В результате получаем искомое дифференциальное уравнение, описывающее гармоническую задачу с криволинейным дефектом по линии $y=f(x)$ или $x=f^{-1}(y)$ для функции

$w(x, y)$, непрерывной по обоим переменным во всей области вместе со своими первыми производными и совпадающей с $\bar{w}(x, y)$ при $(x, y) \notin L$:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{w}(x, y) = & -\mu_1(x) \delta(y - f(x)) - \\ & -w_1(x) \delta'(y - f(x)) - \mu_2(y) \delta(x - f^{-1}(y)) - \\ & -w_2(y) \delta'(x - f^{-1}(y)). \end{aligned} \quad (7)$$

2. Вывод интегрального представления задачи теплопроводности пластины с тонким криволинейным и произвольно ориентированным источником для прямоугольной области

С помощью полученного выше разрешающего уравнения получим интегральное представление для функции $w(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (7) в прямоугольной области $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, граничным условиям

$$w(x, y) = 0, 0 \leq y \leq b \text{ при } x = 0, a; \quad (8)$$

$$w(x, y) = 0, 0 \leq x \leq a \text{ при } y = 0, b \quad (9)$$

и имеющей скачки (4), (5).

Для этого применим синус-преобразование Фурье по переменной y , определяемое формулой (6), к уравнению (7) и граничным условиям (9). С учетом (8), получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \beta^2 \right) w_\beta(x) = & -\mu_1(x) \sin(\beta f(x)) + \\ & + \beta w_1(x) \cos(\beta f(x)) - \int_0^b \delta(x - f^{-1}(\eta)) \mu_2(\eta) \sin \beta \eta d\eta - \\ & - \int_0^b w_2(\eta) \delta'(x) \sin \beta \eta d\eta; \end{aligned} \quad (10)$$

$$w_\beta(0) = w_\beta(a) = 0. \quad (11)$$

Функцию Грина краевой задачи (10) — (11) строим по методу, изложенному в [1]. В результате приходим к следующему представлению:

$$G_\beta(x, \xi) = \Phi_\beta(x - \xi) - \sum_{i=0}^1 \psi_i(x) u_i(\xi), \quad (12)$$

где

$$\Phi_\beta(x - \xi) = \frac{\exp(-\beta|x - \xi|)}{2\beta};$$

$$\psi_0(x) = \frac{\operatorname{sh} \beta(a - x)}{\operatorname{sh} 2\beta}; \quad \psi_1(x) = \frac{\operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{sh} 2\beta}; \quad \rho = \frac{\pi k}{2};$$

$$u_0(\xi) = \frac{-\exp(-\beta|\xi|)}{2\beta}; \quad u_1(\xi) = \frac{-\exp(-\beta|a - \xi|)}{2\beta}.$$

Решение задачи (10) — (11) при помощи построенной функции Грина (12) запишется таким образом:

$$w_\beta(x) = \int_{c_1}^{c_2} F_1(\xi) G_\beta(x, \xi) d\xi + \int_{c_3}^{c_4} F_2(x, \eta) \sin \beta \eta d\eta, \quad (13)$$

где

$$F_1(\xi) = \mu_1(\xi) \sin(\beta f(\xi)) + w_1(\xi) \beta \cos(\beta f(\xi));$$

$$F_2(x, \eta) = -G_\beta(x, f^{-1}(\eta)) \mu_2(\eta) + G_\beta^{0,1}(x, f^{-1}(\eta)) w_2(\eta).$$

Здесь

$$G_\beta^{i,j}(x, f^{-1}(\eta)) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial \xi^j} G_\beta(x, \xi) \Big|_{\xi=f^{-1}(\eta)}.$$

После обращения преобразования Фурье находим искомую функцию:

$$w(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} w_\beta(x) \sin \beta y, \quad \beta = \frac{\pi n}{b}. \quad (14)$$

3. Построение приближенного решения задачи теплопроводности для прямоугольной пластины

Решим теперь конкретно задачу теплопроводности прямоугольной пластины $0 \leq y \leq b$, $0 \leq x \leq a$ с тонким источником на криволинейном отрезке:

$$y = \gamma \left(x - \frac{a}{2} \right)^l + \frac{b}{2}, \quad c_1 \leq x \leq c_2, \quad c_3 \leq y \leq c_4, \quad l = 2i + 1; \quad i \in N.$$

Здесь $c_1 + c_2 = a$, $c_3 + c_4 = b$.

По всему контуру, т. е. на границе, выполняются условия

$$\text{при } x=0, a \quad w(x, y) = 0;$$

$$\text{при } y=0, b \quad w(x, y) = 0. \quad (15)$$

Нагрев пластины происходит за счет действия источника с количеством тепла P , на источнике поддерживается постоянная температура W_0 , поэтому на включении выполняется условие

$$w \left(x, \gamma \left(x - \frac{a}{2} \right)^l + \frac{b}{2} \right) = w \left(\frac{1}{\gamma} \left(y - \frac{b}{2} \right)^{1/l} + \frac{a}{2}, y \right) = W_0, \quad (16)$$

где $W_0 = \text{const}$.

Условие теплового равновесия включения запишется следующим образом:

$$P = T \int_{c_1}^{c_2} \mu_1(x) dx + T \int_{c_3}^{c_4} \mu_2(y) dy. \quad (17)$$

Распределение температуры пластины удовлетворяет уравнению (7), которое в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta w(x, y) = & -\mu_1(x) \delta \left(y - \gamma \left(x - \frac{a}{2} \right)^l - \frac{b}{2} \right) - \\ & - \mu_2(y) \delta \left(x - \frac{1}{\gamma} \left(y - \frac{b}{2} \right)^{1/l} - \frac{a}{2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Кроме того, выполняются условия (4) и (5).

Учитывая, что при переходе через линию расположения включения по прямым, параллельным как x_1 , так и y_1 , температура пластины не терпит скачков, в (4) и (5) получаем:

$$w_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (19)$$

Для решения задачи используем полученное выше интегральное представление (14) функции распре-

ления температуры $w(x, y)$ через скачки с учетом (18). В результате получим:

$$w(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} w_{\beta}(x) \sin \beta y, \quad (20)$$

где

$$w_{\beta}(x) = - \int_{c_1}^{c_2} \mu(\xi) \sin \beta \left[\gamma \left(\xi - \frac{a}{2} \right)^l + \frac{b}{2} \right] G_{\beta}(x, \xi) d\xi;$$

$$\mu_3 = \mu_1(\xi) + \gamma \mu_2 \left(\gamma \left(\xi - \frac{a}{2} \right)^l + \frac{b}{2} \right) \left(\xi - \frac{a}{2} \right)^{l-1}.$$

Используя теперь первое из условий на включении (16), приходим к интегральному уравнению, которое после перехода к промежутку $[-1; 1]$ с помощью замены —

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi \\ x \end{array} \right\} = \frac{c_2 - c_1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \tau \\ z \end{array} \right\} + \frac{a}{2}; \quad \mu_3(\xi) = \frac{W_0 \mu_4(\tau)}{\varepsilon_1 a};$$

$$\varepsilon_1 = \frac{c_2 - c_1}{a}; \quad \varepsilon_2 = \frac{c_4 - c_3}{b}$$

может быть записано в виде

$$\int_{-1}^1 \mu_4(\tau) S(z, \tau) d\tau = -1, \quad -1 \leq z \leq 1. \quad (21)$$

Здесь

$$S(z, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k}{2} (\varepsilon_2 \tau^l + 1) \sin \frac{\pi k}{2} (\varepsilon_2 z^l + 1) \tilde{G}_{\beta}(z, \tau);$$

$$\tilde{G}_{\beta}(z, \tau) = \tilde{\Phi}(z - \tau) - \sum_{i=0}^l \tilde{\Psi}_i(z) \tilde{U}_i(\tau);$$

$$\tilde{\Phi}(z - \tau) = - \frac{\exp(-\omega|z - \tau|)}{2\pi k}; \quad \omega = \rho \varepsilon_1; \quad \rho = \frac{\pi k}{2\lambda}; \quad \lambda = \frac{b}{a};$$

$$\tilde{\Psi}_{0,1}(z) = \frac{\operatorname{sh} \rho(1 \mp \varepsilon_1 z)}{\operatorname{sh} 2\rho}; \quad \tilde{U}_{0,1}(\tau) = - \frac{\exp(-\rho|1 \pm \varepsilon_1 \tau|)}{2\pi k}.$$

Выделим сингулярную часть ядра $S(z, \tau)$ уравнения (21).

Представим $S(z, \tau) = S_0 + S_1$, где

$$S_0 = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi k}{2} (\varepsilon_2 \tau^l + 1) \sin \frac{\pi k}{2} (\varepsilon_2 z^l + 1) \frac{e^{-\omega|z - \tau|}}{2\pi k} \right);$$

$$S_1 = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi k}{2} (\varepsilon_2 \tau^l + 1) \sin \frac{\pi k}{2} (\varepsilon_2 z^l + 1) \sum_{i=0}^l \tilde{\Psi}_i(z) \tilde{U}_i(\tau) \right).$$

Обозначим

$$\omega^* = \frac{\omega}{k}; \quad t = \frac{\omega^* |z - \tau|}{2}.$$

С учетом формулы 1.462 [2] получим:

$$S_0 = - \frac{1}{8\pi} \ln \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4} (\varepsilon_2 (z^l + \tau^l) + 2) + \operatorname{sh}^2 \frac{\omega^* |z - \tau|}{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{4} \varepsilon_2 (z^l - \tau^l) + \operatorname{sh}^2 \frac{\omega^* |z - \tau|}{2}} =$$

$$= - \frac{1}{8\pi} \left[\ln \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4} (\varepsilon_2 (z^l + \tau^l) + 2) + \operatorname{sh}^2 \frac{\omega^* |z - \tau|}{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{4} \varepsilon_2 (z^l - \tau^l) + \operatorname{sh}^2 \frac{\omega^* |z - \tau|}{2}} - (z - \tau)^2 - \ln(z - \tau)^2 \right].$$

Представим $S = S_1 + S_2 + S_3$,

$$\text{где } S_3 = \frac{1}{8\pi} \ln(z - \tau)^2,$$

$$S_2 = \begin{cases} - \frac{1}{8\pi} \ln \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4} (\varepsilon_2 (z^l + \tau^l) + 2) + \operatorname{sh}^2 \frac{\omega^* |z - \tau|}{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{4} \varepsilon_2 (\tau^l - z^l) + \operatorname{sh}^2 \frac{\omega^* |z - \tau|}{2}} - (z - \tau)^2, & \text{когда } z \neq \tau; \\ - \frac{1}{8\pi} \ln \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4} (\varepsilon_2 z + 1)}{\frac{\pi^2 \varepsilon_2^2}{16} \left(\sum_{i=0}^l x^{l-i} y^{i-1} \right) + \frac{\omega^*}{4}}, & \text{когда } z = \tau. \end{cases}$$

Окончательно находим:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 [\ln|z - \tau| + R(z, \tau)] \mu_4(\tau) d\tau = -1, \quad (22)$$

где

$$R(z, \tau) = \frac{1}{2} (S_1(z, \tau) + S_2(z, \tau)).$$

Тогда, согласно [1, 3], следует взять:

$$\mu_4(\tau) = (1 - \tau^2)^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mu}_4(\tau), \quad (23)$$

где $\tilde{\mu}_4(\tau)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Уравнение (22) будем решать методом ортогональных многочленов.

Исходя из (23) и учитывая четность $\mu_4(\tau)$, решение уравнения (22) ищем в виде следующего ряда:

$$\mu_4(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j^* T_{2j}(\tau). \quad (24)$$

Здесь $T_m(\tau)$ — многочлены Чебышева первого рода, μ_j^* — неизвестные постоянные.

Умножая потом обе части (22) на $(1 - \tau^2)^{-\frac{1}{2}} T_{2m}(z)$ и интегрируя (16) по z от -1 до $+1$, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно μ_j^* :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j^* C_{mj} = f_m, \quad (m = 0, \infty). \quad (25)$$

Здесь

$$C_{mj} = C_{mj}^{(1)} + C_{mj}^{(2)};$$

$$C_{mj}^{(1)} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(z) T_{2j}(\tau)}{\sqrt{1-z^2} \sqrt{1-\tau^2}} R(z, \tau) d\tau dz;$$

$$C_{mj}^{(2)} = \frac{\pi}{16} \begin{cases} 4 \ln 2, m = j = 0; \\ j^{-1}, m = j \neq 0; \\ 0, m \neq j; \end{cases}$$

$f_m = \pi \delta_{от}$, $\delta_{от}$ — символ Кронекера.

При этом используются формулы А.6.10, 1.1.1, 1.1.6 из [1].

Используя условие равновесия (17), получаем искомую формулу определения зависимости между величиной количества тепла P и температурой источника w_0 :

$$w_0 = \frac{P}{T} \alpha(\varepsilon, \lambda, \tilde{\gamma}),$$

где

$$\alpha = \frac{2}{\pi \mu_0}; \quad \tilde{\gamma} = \frac{c_4 - c_3}{c_2 - c_1}; \quad \varepsilon = \sqrt{(c_2 - c_1)^2 + (c_4 - c_3)^2} / a.$$

Распределение тепла в пластине находится по формуле (20).

4. Доказательство разрешимости полученной системы

Докажем, что система (25) является квазирегулярной для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$, т. е. когда длина включения $\left(\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \right)$ меньше $\sqrt{2}$. Рассмотрим

$$S_2(z, \tau) = S_{21}(z, \tau) + S_{22}(z, \tau),$$

где

$$S_{21}(z, \tau) = -\frac{1}{8\pi} \ln \left(\sin^2 \frac{\pi}{4} (2 + \varepsilon_2(z, \tau)) + \operatorname{sh}^2 \frac{\omega^*}{2} (z, \tau) \right);$$

$$S_{21}(z, \tau) = -\frac{1}{8\pi} \ln \left((z - \tau)^2 / \sin^2 \frac{\pi}{4} \varepsilon_2(z - \tau) + \operatorname{sh}^2 \frac{\omega^*}{2} (z - \tau) \right).$$

Преобразуем $S_{21}(z, \tau)$.

$$S_{21}(z, \tau) = -\frac{1}{8\pi} \ln \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \varepsilon_1(z - \tau) + \cos \frac{\pi}{2} \varepsilon_2(z + \tau) \right].$$

Обозначим $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, тогда

$$S_{21}(z, \tau) = -\frac{1}{8\pi} \left[\ln \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \frac{\bar{\varepsilon}z + \varepsilon\tau}{2} + \ln \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \frac{\varepsilon z - \bar{\varepsilon}\tau}{2} \right].$$

Несложно показать, что

$$\max_{-1 \leq z, \tau \leq 1} \left| \frac{\varepsilon z - \bar{\varepsilon}\tau}{2} \right| = \max_{-1 \leq z, \tau \leq 1} \left| \frac{\bar{\varepsilon}z - \varepsilon\tau}{2} \right| = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Введем обозначение $G(u) = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} u$.

Рассмотрим $G'(u)/G(u)$:

$$\frac{G'(u)}{G(u)} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} u}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} u}.$$

Из 1.421(2) [2] получим:

$$\frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} u}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} u} = 2u \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2 + u^2}.$$

Преобразовав последнее, имеем:

$$\frac{G'(u)}{G(u)} = 2u \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \frac{1}{1 + \frac{u^2}{(2m-1)^2}} =$$

$$= 2u \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2m-1)^{2n}} =$$

$$= 2u \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n} (-1)^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^{2(n+1)}} = 2u \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n} \alpha_n, \quad (26)$$

где $\alpha_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ и $\alpha_n \leq \alpha_0$.

Так как

$$\ln G(u) = \ln G(0) + \int_0^u \frac{G'(v)}{G(v)} dv, \quad (27)$$

то

$$\ln G(u) = \ln \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2(n+1)}}{n+1} (-1)^n \alpha_n.$$

Последний ряд сходится равномерно при $|u| < 1$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \varepsilon_1(z - \tau) + \cos \frac{\pi}{2} (z + \tau) \right] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{n+1} \left[\left(\frac{\varepsilon z - \bar{\varepsilon}\tau}{2} \right)^{2(n+1)} + \left(\frac{\bar{\varepsilon}z - \varepsilon\tau}{2} \right)^{2(n+1)} \right]. \end{aligned}$$

Используя свойства ортогональности многочленов Чебышева, имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_{mj}^{(1)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(z)}{\sqrt{1-z^2}} \frac{T_{2m}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \times \\ &\times \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \varepsilon_1(z - \tau) + \cos \frac{\pi}{2} \varepsilon_2(z + \tau) \right] dz d\tau = \\ &= \sum_{n=\max(m+j-1, 0)}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{n+1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(z)}{\sqrt{1-z^2}} \frac{T_{2m}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \times \\ &\times \left[\left(\frac{\varepsilon z - \bar{\varepsilon}\tau}{2} \right)^{2(n+1)} + \left(\frac{\bar{\varepsilon}z - \varepsilon\tau}{2} \right)^{2(n+1)} \right] d\tau dz. \end{aligned}$$

Оценим $|\alpha_{mj}^{(1)}|$.

$$|\alpha_{mj}^{(1)}| \leq 4\pi^2.$$

$$\sum_{n=\max(m+j-1,0)}^{\infty} \frac{(\max(\varepsilon_1 \varepsilon_2))^{2(n+1)}}{n+1}.$$

Обозначим $\varepsilon_{\max} = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

$$|\alpha_{mj}^{(1)}| \leq 4\pi^2.$$

$$\sum_{n=\max(m+j-1,0)}^{\infty} \frac{\varepsilon_{\max}^{2(n+1)}}{n+1} \leq 4\pi^2.$$

$$\sum_{n=m+j-1}^{\infty} \varepsilon_{\max}^{2(n+1)} \leq 4\pi^2 \frac{\varepsilon_{\max}^{2(\max(m+j,1))}}{1-\varepsilon_{\max}^2} \leq A_1(\varepsilon_{\max}) \varepsilon_{\max}^{2(\max(m+j,1))},$$

где $|A_2(\varepsilon_{\max})| < \text{const } 2$.

Рассмотрим

$$S_1(z, \tau) = - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sin \frac{\pi k}{2} (\varepsilon_2 \tau + 1) \sin \frac{\pi k}{2} \times \right.$$

$$\left. \times (\varepsilon_2 z + 1) (\tilde{\psi}_0(z) \tilde{u}_0(\tau) + \tilde{\psi}_1(z) \tilde{u}_1(\tau)) \right],$$

где $\rho_k = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$;

$$\tilde{\psi}_{0,1}(z) = \frac{\text{sh} \rho_k (1 \mp \varepsilon_1 z)}{\text{sh} 2\rho_k}; \quad \tilde{u}_{0,1}(\tau) = - \frac{e^{-\rho_k |1 \pm \varepsilon_1 \tau|}}{2\rho_k}.$$

Так как

$$\frac{1}{\text{sh} 2\rho_k} = \frac{2}{e^{2\rho_k} (1 - e^{-4\rho_k})} = 2e^{-2\rho_k} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-4\rho_k m},$$

то

$$\begin{aligned} S_1(z, \tau) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-4\rho_k m} \left[e^{\rho_k (1 - \varepsilon_1 z - 1 - \varepsilon_1 \tau)} - \right. \\ &\quad \left. - e^{\rho_k (-1 + \varepsilon_1 z - 1 - \varepsilon_1 \tau)} + e^{-\rho_k (1 + \varepsilon_1 z - 1 + \varepsilon_1 \tau)} - \right. \\ &\quad \left. - e^{\rho_k (-1 - \varepsilon_1 z - 1 + \varepsilon_1 \tau)} \right] \frac{e^{2\rho_k}}{\rho_k} \sin \rho_k (\varepsilon_2 \tau + 1) \times \\ &\quad \times \sin \rho_k (\varepsilon_2 z + 1) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-4\rho_k m} \left[e^{-\rho_k (2 + \varepsilon_1 (z + \tau))} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\rho_k (2 - \varepsilon_1 (z + \tau))} - e^{-\rho_k (4 + \varepsilon_1 (\tau - z))} - e^{-\rho_k (4 + \varepsilon_1 (z - \tau))} \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{\rho_k} \sin \rho_k (\varepsilon_2 \tau + 1) \sin \rho_k (\varepsilon_2 z + 1). \end{aligned}$$

Используя формулу 1.462 из [2], после преобразований получим:

$$S_1(z, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \ln \left[\frac{\left[\text{ch} \frac{\pi}{2} [2(1+2m)] + \text{ch} \frac{\pi}{2} \varepsilon (z + \tau) \right]}{\left[\text{ch} \frac{\pi}{2} [2(1+2m)] - \text{ch} \frac{\pi}{2} (\varepsilon z + \varepsilon \tau) \right]} \right] \times$$

$$\times \frac{\left[\text{ch} \frac{\pi}{2} [2(1+2m)] + \text{ch} \frac{\pi}{2} \bar{\varepsilon} (z + \tau) \right]}{\left[\text{ch} \frac{\pi}{2} [2(1+2m)] - \text{ch} \frac{\pi}{2} (\bar{\varepsilon} z + \bar{\varepsilon} \tau) \right]} +$$

$$+ \ln \left[\frac{\left[\text{ch} \frac{\pi}{2} [4(1+m)] + \text{ch} \frac{\pi}{2} (\varepsilon \tau - \bar{\varepsilon} z) \right]}{\left[\text{ch} \frac{\pi}{2} [4(1+m)] - \text{ch} \frac{\pi}{2} \varepsilon (\tau - z) \right]} \right] \times$$

$$\times \frac{\left[\text{ch} \frac{\pi}{2} [2(1+m)] + \text{ch} \frac{\pi}{2} (\bar{\varepsilon} \tau - \varepsilon z) \right]}{\left[\text{ch} \frac{\pi}{2} [4(1+m)] - \text{ch} \frac{\pi}{2} \bar{\varepsilon} (\tau - z) \right]}, \quad (28)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$.

Рассмотрим выражение

$$F_m(u) = \ln(\text{ch} \pi \alpha_m + \text{ch} \pi u) = \ln f_m(u).$$

$$\frac{d}{du} F_m(u) = \frac{\frac{d}{du} f_m(u)}{f_m(u)} = \frac{\pi \text{sh} \pi u}{\text{ch} \pi \alpha_m + \text{ch} \pi u}.$$

Найдем корни функции:

$$f_m(u) = \text{ch} \pi \alpha_m + \text{ch} \pi u = 2 \text{ch} \frac{\pi}{2} (\alpha_m + u) \text{ch} \frac{\pi}{2} (\alpha_m - u);$$

$$\frac{\pi}{2} (\alpha_m \pm u) = i \frac{\pi}{2} (1 + 2k), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$u_{km}^{\pm} = \mp \alpha_m + i(1 + 2k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим первый множитель числителя первого слагаемого из (28):

$$\left[\text{ch} \frac{\pi}{2} [2(1+2m)] + \text{ch} \frac{\pi}{2} \varepsilon (z + \tau) \right].$$

Пусть $\alpha_m = 1 + 2m$,

$$S_{mk} = \mp (1 + 2m) + i(1 + 2k), \quad m = 0, \infty, k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая формулу 2.102 из [2], получим:

$$\frac{f'_m(u)}{f_m(u)} = +2u \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{u^2 - S_{mk}^2} + \frac{1}{u^2 - \bar{S}_{mk}^2} \right).$$

Аналогично (26), после преобразований получим:

$$\frac{f'_m(u)}{f_m(u)} = -2u \sum_{k=0}^{\infty} u^{2n} \left(\frac{1}{S_{mk}^{2(n+1)}} + \frac{1}{\bar{S}_{mk}^{2(n+1)}} \right).$$

Учитывая (27), имеем:

$$\ln[\text{ch} \pi (1 + 2m) + \text{ch} \pi u] = \ln[\text{ch} \pi (1 + 2m)] + 1 -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n+2}}{n+2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{S_{mk}^{2(n+1)}} + \frac{1}{\bar{S}_{mk}^{2(n+1)}} \right).$$

Аналогично можно преобразовать все сомножители в каждом из слагаемых выражения (28).

Обозначим

$$\gamma_n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{S_{mk}^{2(n+1)}} + \frac{1}{S_{mk}^{-2(n+1)}} \right); \gamma_n \leq \gamma_0.$$

Используя свойство ортогональности многочленов Чебышева, по аналогии с ранее изложенным получим:

$$\left| a_{mj}^{(3)} \right| = \left| \int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(z)}{\sqrt{1-z^2}} \frac{T_{2j}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} S_1 dz d\tau \right| \leq$$

$$\leq A_3(\max(\epsilon_1, \epsilon_2))(\max(\epsilon_1, \epsilon_2))^{2(\max(m+j, 1))}.$$

Здесь учтено, что

$$\max_{z, \tau \in [-1; 1]} \left| \frac{\epsilon z \pm \bar{\epsilon} \tau}{2} \right| = \max_{z, \tau \in [-1; 1]} \left| \frac{\epsilon \tau - \bar{\epsilon} z}{2} \right| =$$

$$= \max_{z, \tau \in [-1; 1]} \left| \frac{\bar{\epsilon}(\tau \pm z)}{2} \right| = \max_{z, \tau \in [-1; 1]} \left| \frac{\epsilon(\tau \pm z)}{2} \right| = \max_{z, \tau \in [-1; 1]} (\epsilon_1, \epsilon_2) = \epsilon_{\max}.$$

$$\text{Итак, } \left| a_{mj}^{(3)} \right| \leq A_3(\epsilon_{\max}) \epsilon_{\max}^{2(\max(m+j, 1))}.$$

Окончательно получаем следующие оценки:

$$r_m = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\left| a_{mj}^{(1)} \right| + \left| a_{mj}^{(2)} \right| + \left| a_{mj}^{(3)} \right| \right) \leq M \cdot \epsilon_{\max}^{2(\max(m, 1))}.$$

Для достаточно больших m и $\epsilon_{\max} < 1$ получаем, что $r_m < 1$. Следовательно, система (25) является квазирегулярной, и приближенное решение ее может быть получено методом редукции.

5. Результаты численного анализа

Численная реализация задачи проводилась для случаев $l=1; 3$. Исследовались значения W_0 при различных параметрах $\epsilon, \lambda, \tilde{\gamma}$. Результаты расчетов отражены на графиках **рис. 1** для $l=1$, **рис. 2** — для $l=3$.

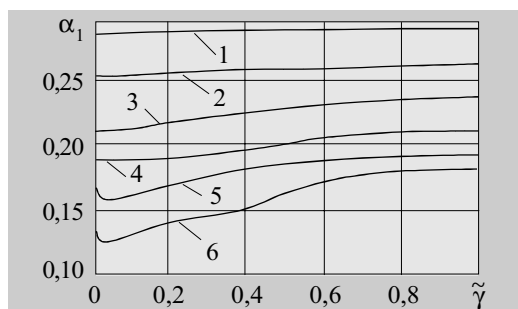


Рис. 1. График зависимости $\alpha_1 = \alpha(\epsilon; 2; \tilde{\gamma})$ от $\tilde{\gamma}$

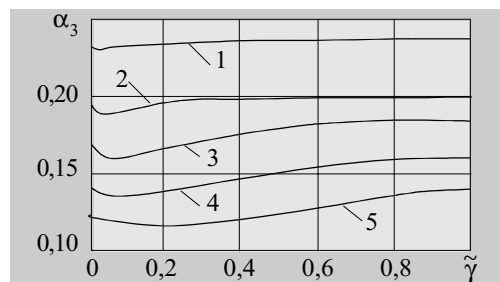


Рис. 2. График зависимости $\alpha_3 = \alpha(\epsilon; 1; \tilde{\gamma})$ от $\tilde{\gamma}$

На рис. 1 представлена зависимость $\alpha_1 = \alpha(\epsilon; 2; \tilde{\gamma})$ от $\tilde{\gamma}$. Кривые 1, 2, ..., 6 соответствуют $\epsilon = 0,4; 0,5; \dots; 0,9$. При малых значениях относительной длины включения наименьшее значение провисания мембраны α_1 достигается, когда угол поворота $\tilde{\gamma} = 0$. При больших значениях относительной длины включения ($\epsilon > 0,6$) наименьшее значение провисания мембраны достигается, когда угол поворота $0 < \tilde{\gamma} < 0,2$. Это обусловлено влиянием границ.

На рис. 2 представлена зависимость $\alpha_3 = \alpha(\epsilon; 1; \tilde{\gamma})$ от $\tilde{\gamma}$. Кривые 1, 2, ..., 5 соответствуют $\epsilon = 0,4; 0,5; 0,6; 0,8; 0,9$. В этом случае (для криволинейного включения) наименьшее значение провисания мембраны достигается, когда угол поворота $0 < \tilde{\gamma} < 0,4$.

Выводы

Таким образом, с помощью обобщенного метода интегральных преобразований получено разрешающее дифференциальное уравнение, описывающее математическую модель для решения двумерных задач теплопроводности с расположенными произвольным образом непересекающимися криволинейными неоднородностями (дефектами) общего вида.

Предложенный метод позволяет решать задачи исследования тепловых процессов в сложных дискретно-непрерывных конструкциях. В отличие от других методов, он не требует значительных затрат ресурсов ЭВМ. Итоговая система линейных алгебраических уравнений (25) решалась на ЭВМ методом редукции.

Обоснованность решения этим методом строго математически доказана, что обуславливает высокую точность решения задач предложенным методом. Требуемая для решения данной задачи точность вычислений 4—5 значащих цифр достигалась при сохранении в системе 6—7 уравнений.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. — М.: Наука, 1982.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.



замеченные опечатки

В номере 5 журнала за 2003 год в статье «Исследование эффективности проволочного радиатора новой конструкции» (стр. 28—31) неверно указана дата поступления статьи — должно быть 20.03 2003 г. Также допущена ошибка в табл. 3 на стр. 31 — в колонке «%увеличения» должно быть 27 вместо 29.

замеченные опечатки

