

К. ф.-м. н. В. И. ГАВРЬИШ, А. И. КОСАЧ

Дата поступления в редакцию
29.09 2010 г.

Украина, Национальный университет «Львовская политехника»
E-mail: ikni_pz@polynet.lviv.ua

Оппонент д. ф.-м. н. И. О. ГОРОШЕК
(Институт моделирования в энергетике, г. Киев)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМОВ В ЭЛЕМЕНТАХ МИКРОЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ

Решена граничная задача теплопроводности для изотропной полосы с инородным прямоугольным включением, на одной из границ которой осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой, а другая нагревается тепловым потоком.

Процесс проектирования отдельных узлов и элементов конструкций микроэлектронной аппаратуры требует точной математической модели тепловых процессов в структурах с инородными включениями. Для этого необходима разработка новых эффективных методов решения краевых задач теплопроводности, что имеет как теоретическое, так и практическое значение. Учет инородных включений в структурах усложняет математическую модель, однако увеличивает ее точность, что необходимо для обеспечения термоустойчивости структур. Поэтому разработка новых алгоритмов и программных средств для анализа температурных режимов в отдельных узлах и конструктивных элементах микроэлектронной аппаратуры является достаточно актуальной задачей.

Некоторые исследования теплопроводности тел одномерной кусочно-однородной структуры были проведены в [1]. В [2] рассмотрены двумерные задачи теплопроводности для кусочно-однородных тел с трещинами, которые сводятся к решению сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур.

Настоящая работа посвящена решению граничной стационарной задачи теплопроводности для изотропной полосы с инородным включением прямоугольной формы, на одной из границ которой осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой, а другая нагревается тепловым потоком.

Постановка задачи

Рассмотрим изотропную полосу, содержащую инородное прямоугольное включение площадью $4hl$, отнесенную к декартовой системе координат (x, y) с началом в центре включения (рис. 1). На границах включения $L_x = \{(x, y): |x|=h, |y|\leq l\}$ и $L_y = \{(x, y): |x|\leq h, |y|=l\}$ заданы условия идеального теплового контакта. На границе полосы $\Gamma_- = \{(x, -l-d_h): |x|<\infty\}$ осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой постоянной температуры t_c . Другая граница по-

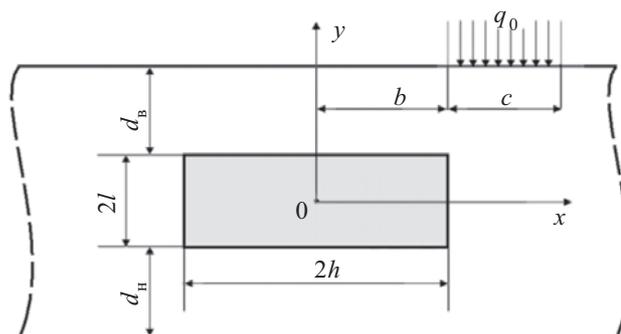


Рис. 1. Изотропная полоса с инородным прямоугольным включением, нагреваемая тепловым потоком

лосы $\Gamma_+ = \{(x, l+d_b): |x|<\infty\}$ теплоизолирована за исключением отрезка длиной c , левый конец которого находится на расстоянии b от центра включения и на который падает тепловой поток мощностью $q_0 = \text{const}$.

Построение исходного уравнения теплопроводности

Распределение стационарного температурного поля $t(x, y)$ в рассматриваемой системе можно получить путем решения уравнения теплопроводности [3, с. 46—58, 4, с. 17—29]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, y) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(x, y) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=l+d_b} &= -q_0 [S_-(x-b) + S_+(x-b-c)]; \\ \lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=-l-d_h} &= \alpha \theta \Big|_{y=-l-d_h}, \\ \theta \Big|_{|x| \rightarrow \infty} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\lambda(x, y)$ — коэффициент теплопроводности неоднородной полосы $\lambda(x, y) = \lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1) \cdot N(x, h) \cdot N(y, l)$;

λ_1, λ_0 — коэффициенты теплопроводности основного материала и материала включения;

α — коэффициент теплоотдачи с границы полосы Γ_- ;

$\theta = t - t_c$;

$N(x, h) = S_-(x+h) - S_+(x-h)$;

S_-, S_+ — асимметрические единичные функции [5],

$$S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \zeta > 0; \\ 0,5 \mp 0,5 & \text{при } \zeta = 0; \\ 0 & \text{при } \zeta < 0. \end{cases}$$

Введем функцию [6]

$$T = \lambda(x, y) \cdot \theta \quad (4)$$

и продифференцируем ее по переменным x и y с учетом формулы (3). В результате получим

$$\begin{aligned} \lambda(x, y) \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial x} + (\lambda_0 - \lambda_1) \times \\ &\times \left[\theta|_{x=h} \delta_+(x-h) - \theta|_{x=-h} \delta_-(x+h) \right] N(y, l); \\ \lambda(x, y) \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial y} + (\lambda_0 - \lambda_1) \times \\ &\times \left[\theta|_{y=l} \delta_+(y-l) - \theta|_{y=-l} \delta_-(y+l) \right] N(x, h), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\delta_{\pm}(\zeta) = \frac{dS_{\pm}(\zeta)}{d\zeta}$ — асимметрические дельта-функции Дирака [5], используемые при моделировании

многих физических процессов для кусочно-однородных сред.

Подставляя выражения (5) в соотношение (1), приходим к дифференциальному уравнению в частных производных с разрывными и сингулярными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \Delta T + (\lambda_1 - \lambda_0) \{ & \left[\theta|_{x=-h} \delta'_-(x+h) - \theta|_{x=h} \delta'_+(x-h) \right] \times \\ & \times N(y, l) + \left[\theta|_{y=-l} \delta'_-(y+l) - \theta|_{y=l} \delta'_+(y-l) \right] \times \\ & \times N(x, h) \} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа в декартовой прямоугольной системе координат.

Нахождение аналитического решения задачи

Аппроксимируем функции $\theta(\pm h, y)$, $\theta(x, \pm l)$ следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} \theta(\pm h, y) &= \theta_1^{(\pm h)} + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^{(\pm h)} - \theta_j^{(\pm h)}) S_-(y - y_j); \\ \theta(x, \pm l) &= \theta_1^{(\pm l)} + \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(\pm l)} - \theta_k^{(\pm l)}) S_-(x - x_k), \end{aligned} \quad (7)$$

где $y_j \in]-l; l[$; $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n-1}$;

$x_k \in]-h; h[$; $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{m-1}$;

$\theta_j^{(\pm h)}$, $\theta_k^{(\pm l)}$ — неизвестные аппроксимирующие значения искомой температуры.

Подставляя выражения (7) в уравнение (6), получаем

$$\begin{aligned} \Delta T + (\lambda_1 - \lambda_0) \{ & \left[\theta_1^{(-l)} N(y, l) + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^{(-l)} - \right. \\ & \left. - \theta_j^{(-l)}) N(y, y_j) \right] \delta'_-(x+h) - \left[\theta_1^{(l)} N(y, l) + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1}^{(l)} - \right. \\ & \left. - \theta_j^{(l)}) N(y, y_j) \right] \delta'_+(x-h) + \left[\theta_1^{(-h)} N(x, h) + \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(-h)} - \right. \\ & \left. - \theta_k^{(-h)}) N(x, x_k) \right] \delta'_-(y+l) - \left[\theta_1^{(h)} N(x, h) + \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(h)} - \right. \\ & \left. - \theta_k^{(h)}) N(x, x_k) \right] \delta'_+(y-l) \} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

где $N(y, y_j) = S_-(y - y_j) - S_+(y - l)$;

$N(x, x_k) = S_-(x - x_k) - S_+(x - h)$.

Применив интегральное преобразование Фурье по координате x уравнению (8) и граничным условиям (2) с учетом соотношения (4), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{T}}{dy^2} - \xi^2 \bar{T} &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} (\lambda_1 - \lambda_0) \{ \xi \left[e^{-ih\xi} (\theta_1^{(-l)} N(y, l) + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} (\theta_{k+1}^{(-l)} - \theta_k^{(-l)}) N(y, y_k)) - e^{ih\xi} (\theta_1^{(l)} N(y, l) + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} (\theta_{k+1}^{(l)} - \theta_k^{(l)}) N(y, y_k)) \left. \right] + \frac{1}{\xi} \left[(2\theta_1^{(-h)} \cdot \text{sh } ih\xi + \right. \\ & + \sum_{j=1}^{m-1} (\theta_{j+1}^{(-h)} - \theta_j^{(-h)}) (e^{ih\xi} - e^{ix_k \xi})) \delta'_-(y+l) - \\ & - \left. (2\theta_1^{(h)} \cdot \text{sh } ih\xi + \sum_{j=1}^{m-1} (\theta_{j+1}^{(h)} - \theta_j^{(h)}) \times \right. \\ & \left. \left. \times (e^{ih\xi} - e^{ix_k \xi})) \delta'_+(y-l) \right] \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}}{dy} \Big|_{y=-l-d_h} &= \frac{\alpha}{\lambda_1} \bar{T} \Big|_{y=-l-d_h}, \\ \frac{d\bar{T}}{dy} \Big|_{y=l+d_b} &= \frac{iq_0}{\sqrt{2\pi}\xi} e^{i\zeta b} (e^{i\zeta c} - 1), \end{aligned} \quad (10)$$

где \bar{T} — трансформанта функции T , $\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} T dx$;

ξ — параметр интегрального преобразования Фурье;

i — мнимая единица.

Неоднородное дифференциальное уравнение (9) решено методом вариации постоянных. С использованием граничных условий (10) получено частное решение граничной задачи (9), (10). Затем, применив обратное интегральное преобразование Фурье, получим выражение

$$T = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{q_0}{\xi} P(\xi, y) \Phi(\xi, x) + (\lambda_0 - \lambda_1) \times \right. \\ \times \left[\theta_1^{(-h)} (\sin \xi(x+h) - \theta_1^{(h)} \sin \xi(x-h)) \times \right. \\ \times \Phi_1(\xi, y) + \sin \xi(x+h) \sum_{j=1}^{m-1} (\theta_{j+1}^{(-h)} - \theta_j^{(-h)}) \Phi(\xi, y, y_j) - \\ - \sin \xi(x-h) \sum_{j=1}^{m-1} (\theta_{j+1}^{(h)} - \theta_j^{(h)}) \Phi(\xi, y, y_j) + \\ + \Phi_2(\xi, y) (2\theta_1^{(-l)} \sin h\xi \cdot \cos x\xi - \sum_{k=1}^{n-1} (\theta_{k+1}^{(-l)} - \\ - \theta_k^{(-l)}) F(\xi, x, x_k)) + \Phi_3(\xi, y) (2\theta_1^{(l)} \sin h\xi \cdot \cos x\xi - \\ \left. \left. - \sum_{k=1}^{n-1} (\theta_{k+1}^{(l)} - \theta_k^{(l)}) F(\xi, x, x_k) \right) \right] \right\} d\xi. \quad (11)$$

Здесь

$$\Phi(\xi, x) = \sin \xi(b-x) + \sin \xi(x-b-c); \\ \Phi_1(\xi, y) = \frac{1}{\xi} F(\xi, y) - P(\xi, y) f(\xi); \\ \Phi_2(\xi, y, y_j) = \frac{1}{\xi} F(\xi, y, y_j) - P(\xi, y) f(\xi, y_j); \\ \Phi_3(\xi, y) = P(\xi, y) \operatorname{sh} \xi(2l + d_b) - \frac{1}{\xi} \operatorname{ch} \xi(y+l) S_-(y+l); \\ \Phi_3(\xi, y) = \frac{1}{\xi} \operatorname{ch} \xi(y-l) S_+(y-l) - P(\xi, y) \operatorname{sh} \xi d_b; \\ P(\xi) = \xi [\operatorname{sh} \xi(l + d_b) P_1(\xi) + \operatorname{ch} \xi(l + d_b) P_2(\xi)]; \\ P_1(\xi) = \lambda_1 \xi \operatorname{ch} \xi(l + d_b) + \alpha \operatorname{sh} \xi(l + d_b); \\ P_2(\xi) = \lambda_1 \xi \operatorname{sh} \xi(l + d_b) + \alpha \operatorname{ch} \xi(l + d_b); \\ P(\xi, y) = \frac{1}{P(\xi)} [P_1(\xi) \operatorname{ch} \xi y + P_2(\xi) \operatorname{sh} \xi y]; \\ F(\xi, y) = \operatorname{ch} \xi(y+l) S_-(y+l) - \operatorname{ch} \xi(y-l) \times \\ \times S_+(y-l) - N(y, l); \\ F(\xi, y, y_j) = \operatorname{ch} \xi(y-y_j) S_-(y-y_j) - \operatorname{ch} \xi(y-l) \times \\ \times S_+(y-l) - N_j(y, y_j); \\ F(\xi, x, x_k) = \sin \xi(x-h) - \sin \xi(x-x_k); \\ f(\xi) = \operatorname{sh} \xi(2l + d_b) - \operatorname{sh} \xi d_b; \\ f(\xi, y_j) = \operatorname{sh} \xi(l + d_b - y_j) - \operatorname{sh} \xi d_b.$$

Неизвестные аппроксимирующие значения температуры $\theta_j^{(\pm h)}$ ($j=1, \dots, n-1$), $\theta_k^{(\pm l)}$ ($k=1, \dots, m-1$) находим, решая систему $2(n+m)$ линейных алгебраических уравнений, полученную из выражения (11).

Таким образом, искомое температурное поле в неоднородной полосе описывается формулой (11). Из соотношения (11) получаем значение температуры в любой точке полосы и инородного включения.

Анализ численных результатов

Численный анализ безразмерной избыточной температуры $T^* = \frac{T}{q_0 h}$ проводился при фиксированном значении критерия Био $Bi = \frac{\alpha h}{\lambda_1}$ и следующих исходных данных: материал полосы — керамика ВК94-I ($\lambda_1=13,4$ Вт/(м·К)), материал включения — серебро ($\lambda_0=419$ Вт/(м·К)), количество разбиений отрезков $] -h; h[$ и $] -l; l[$ — $n=m=5$; $L=l/h=2$; $D_b=d_b/h$; $B=b/h=2$; $C=c/h=1$.

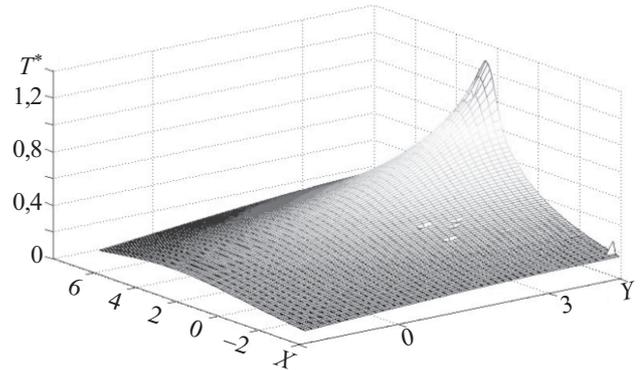


Рис. 2. Распределение избыточной безразмерной температуры T^* по площади изотропной полосы при $D_b=1$, $Bi=5$

На рис. 2 изображено полученное температурное поле рассматриваемой изотропной полосы в безразмерных координатах $X=x/h$ и $Y=y/h$ при $D_b=d_b/h=1$ и $Bi=5$. Как видим, температура достигает максимального значения на границе полосы $Y=L+D_b$, т. е. в области непосредственного воздействия теплового потока, а при $-4 \leq X \leq 4$, $-1,5 \leq Y \leq 0$ и $-4 < X < 0$, $0 < Y \leq 4$ она практически равна температуре среды.

На рис. 3 показано изменение температуры T на границах включения, откуда видно, что она практически равна температуре среды при $X \leq -12$, $X \geq 17$ на границах, где $Y=\text{const}$, и при $Y \leq -2,75$ на границах, где $X=\text{const}$.

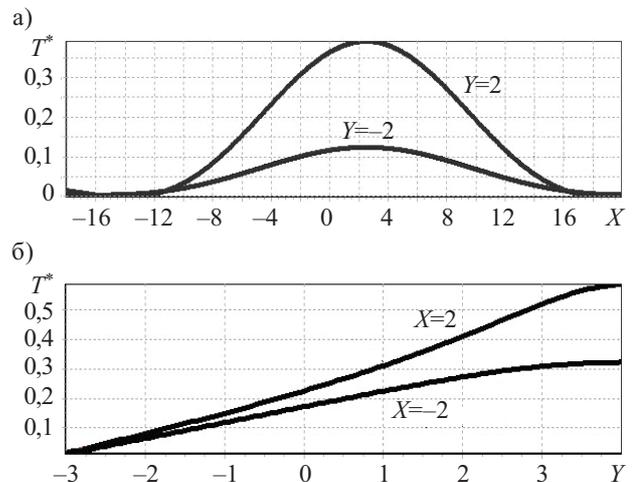


Рис. 3. Изменение избыточной безразмерной температуры T^* на границах включения вдоль осей координат Ox (а) и Oy (б) при $D_b=2$, $Bi=5$

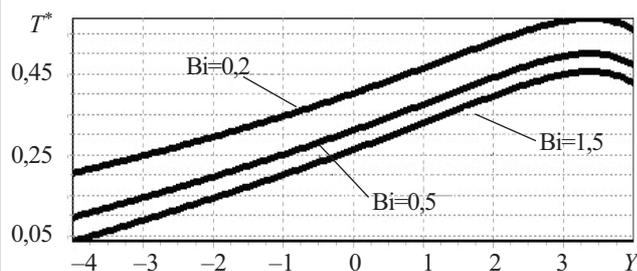


Рис. 4. Изменение избыточной безразмерной температуры T^* вдоль оси координат Oy при $X=0$ для различных значений критерия Био при $D_n=2$

Графики на рис. 4 демонстрируют влияние теплоотдачи на распределение температуры при указанных исходных данных. Здесь видно, что с увеличением критерия Био температура убывает.

Таким образом, в настоящей работе решена граничная стационарная задача теплопроводности для изотропной полосы с инородным включением прямоугольной формы, на одной из границ которой осу-

ществляется конвективный теплообмен с внешней средой, а другая нагревается тепловым потоком.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Беляев Н. В., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности. Ч. I.— М.: Высш. шк., 1982. [Belyaev N. V., Ryadno A. A. Metody teorii teploprovodnosti. Ch. I. Moscow. Vyssh. shk. 1982]
2. Саврук М. П., Зеленьак В. М. Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами: монографія.— Львів: Растр-7, 2009. [Savruk M. P., Zelenyak V. M. Dvovimirni zadachi termoprzhnosti dlya kuskovo-odnorodnikh til z trishchinami: monografiya. L'viv. Rastr-7. 2009]
3. Подстригач Я. С., Ломакін В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры.— М.: Наука, 1984. [Podstrigach YA. S., Lomakin V. A., Kolyano Yu. M. Termouprugost' tel neodnorodnoi struktury. Moscow. Nauka. 1984]
4. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела.— Киев: Наукова думка, 1992. [Kolyano Yu. M. Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela. Kiev. Naukova dumka. 1992]
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. [Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. Moscow. Nauka. 1977]
6. Коляно Ю. М., Кричевец Ю. М., Гаврыш В. И. Уравнение теплопроводности для элементов микроэлектроники.— Часть II // Радиоэлектронное материаловедение.— Львов, 1989.— С. 175—183. [Kolyano Yu. M., Krichevets Yu. M., Gavrysh V. I. Uravnenie teploprovodnosti dlya elementov mikroelektroniki. Chast' II // Radioelektronnoe materialovedenie. L'vov. 1989. P. 175

К. т. н. Г. Н. ШИЛО, Е. В. ОГРЕНИЧ,
к. т. н. Н. П. ГАПОНЕНКО

Украина, Запорожский национальный технический университет
E-mail: gshilo@zntu.edu.ua, chipmob@gmail.com

Дата поступления в редакцию
19.07 20010 г.

Оппонент к. т. н. В. Е. ТРОФИМОВ
(ОНПУ, г. Одесса)

ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАДИАТОРОВ С ОПТИМАЛЬНЫМИ МАССОГАБАРИТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Предложенный метод может использоваться для проектирования любых ребристых радиаторов и приводит к снижению массы более чем в 2,5 раза при увеличении объема в 1,5 раза.

Мощные полупроводниковые приборы, которые широко применяются в преобразовательной технике и в выходных каскадах систем управления, имеют ограниченную допустимую температуру $p-n$ -переходов [1]. Обычно эти приборы очень компактны и имеют высокое тепловое сопротивление между корпусом прибора и окружающей средой. Для обеспечения их теплового режима при значительных уровнях мощности разработчики радиоаппаратуры обычно используют радиаторы. Существует большое количество радиаторов [2, 3], отличающихся типом оребрения (ребристые, штыревые, проволочные, гофрированные) и формой основания (пластина, цилиндр).

В [4] показано, что при оптимальном распределении температуры вдоль теплоотводящих элементов радиаторов возможно значительное уменьшение их массы и габаритов. Возможность уменьшения массы и объема ребристых радиаторов показана в [5, 6], однако оптимизация проводилась при заданной толщине

ребер и, кроме того, в использованных моделях не учитывался трехмерный характер температурного поля в основании радиатора. При расчете тепловых режимов радиаторов использовались граничные условия 3-го рода и приближенные соотношения для коэффициентов теплоотдачи.

Существенное увеличение точности расчетов можно получить при использовании средств инженерного проектирования [7—9], позволяющих моделировать распределение температуры в сложных конструкциях устройств различного применения. В сочетании с алгоритмами оптимизации это открывает путь к разработке методов проектирования радиаторов, учитывающих любые конструктивные и технологические ограничения.

Целью настоящей работы является разработка методов проектирования ребристых радиаторов с оптимальными массогабаритными параметрами на основе использования средств инженерного проектирования.

Тепловая модель ребристого радиатора

Построение модели радиатора в среде инженерного проектирования делится на этапы:

- создание трехмерной модели твердого тела по заданным размерам;
- задание теплофизических параметров материала радиатора и параметров теплоносителя;