ПОТЕНЦІЙНІ ЙМОВІРНІСНІ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИКИ ГОТЕЛІНҐА, ПОБУДОВАНОЇ НА ОСНОВІ КВАДРАТУРНИХ СКЛАДОВИХ ДОВІЛЬНО КОРЕЛЬОВАНОГО ГАУСОВОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

С. К. Єнакі, к. т. н. В. О. Аверочкін, А. Д. Медведик

Національний університет «Одеська політехніка»
Україна, м. Одеса
averochkin@yahoo.com

Вирішальна статистика Готелінґа дозволяє розв’язати одну з важливих задач сучасної радіолокації, пов’язану зі стабілізацією ймовірності хибної тривоги. Маючи на увазі цифрову реалізацію обробки, яка, як правило, передбачає побудову вирішальних статистик на основі квадратурних складових вхідного вузькосмугового процесу, в роботі розглядаються умовні потенційні ймовірнісні та числові характеристики статистики Готелінґа, побудованої на основі квадратурних складових.

Ключові слова: статистика Готелінґа, потенційна характеристика, умовна щільність, математичне очікування та дисперсія.

Статистика Готелінга [1] дозволяє вирішити актуальну для радіолокації задачу стабілізації хибної тривоги в умовах гаусівських завад із довільними коваріаційними властивостями. В роботі досліджується умовна щільність розподілу ймовірностей статистики Готелінга за відсутності та наявності детермінованого сигналу, коли випадкова складова вхідного вузькосмугового процесу описується довільно корельованим гаусівським процесом із нульовим математичним очікуванням, які дозволяють виявити її потенційні властивості.

В умовах відомих параметрів діючих перешкод статистика має вигляд

$$U^2\left(X\right) = X^T B_X^{-1} X\,,$$

де $X^T = \left[X_I^T \quad \mathrm{M} \; X_Q^T \right]$ — вектор відліків квадратурних складових вхідного сигналу; B_X — коваріаційна матриця вектора відліків квадратурних складових перешкоди.

Відомо [2], що за нульового вектора математичних очікувань (відсутності сигналу, що виявляється, та справедливості гіпотези H_0), вектор X із коваріаційною матрицею B_X можна отримати шляхом лінійного перетворення вектора Y, що має незалежні складові з нульовим математичним очікуванням та одиничною дисперсією $X = AY$, де матриця A задовольняє співвідношенню $AA^T = B_X$. Виходячи з останнього співвідношення, матрицю можна позначити як $A = B_X^{\frac{1}{2}}$ і останню рівність записати у вигляді $B_X^{\frac{1}{2}} B_X^{\frac{1}{2}T} = B_X$.

З викладеного випливає, що за відсутності сигналу вирішальну статистику можна подати у вигляді

$$U^2\left(X\right) = X^T B_X^{-1} X = \left(B_X^{\frac{1}{2}} Y \right)^T B_X^{-1} \left(B_X^{\frac{1}{2}} Y \right) = Y^T Y = \sum_{i=1}^{2N} y_i^2\,,$$

де N — кількість оброблюваних вузькосмугових імпульсів, і ймовірнісні характеристики вирішальної статистики визначаються ймовірнісними характеристиками скінченної суми квадратів незалежних гаусових випадкових величин з нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією.

Використовуючи відомий [3] закон розподілу квадрата гаусівської випадкової величини і метод характеристичних функцій для знаходження розподілу суми незалежних випадкових величин, можна показати, що за відсутності умовна щільність розподілу статистики Готелінґа сигналу дорівнює

$$\omega_{1\,U^2}\left(x\,\middle|\,H_0\right)=\frac{x^{N-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^N\Gamma\left(N\right)},$$

визначається тільки кількістю імпульсів, що обробляються, та не залежить від характеристик завад.

Умовні математичне очікування та дисперсія у цьому випадку дорівнюють, відповідно:

$$m_1(U^2/H_0)=2N\,;$$
$$\sigma^2(U^2/H_0)=4N\,.$$

За наявності сигналу $S^T=\left[S_I^T \quad \text{M} \quad S_Q^T\right]$, де S_I, S_Q — вектори відліків його квадратурних складових, можна довести, що умовна щільність розподілу статистики Готелінґа визначається співвідношенням

$$w_{1\,U^2(X)}\left(x\,\middle|\,H_1\right)=\frac{x^{N-1}e^{-\frac{x+\lambda}{2}}}{2^N\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(N-\frac{1}{2}\right)}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{x^r\lambda^r}{\left(2r\right)!}\mathrm{B}\left(r+0.5,\,N-\frac{1}{2}\right),$$

де $\lambda=S^TB_X^{-1}S$; $\Gamma\left(\cdot\right)$, $B\left(\cdot,\cdot\right)$ — гамма- та бета-функції відповідно.

Умовні математичне очікування та другий початковий момент у цьому випадку, відповідно, дорівнюють

$$m_1(U^2/H_1)=\frac{2e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{(2\lambda)^r\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)(N+r)}{\left(2r\right)!}\,;$$

$$m_2(U^2/H_1)=\frac{4e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{(2\lambda)^r\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)(N+r+1)(N+r)}{\left(2r\right)!}\,,$$

а умовна дисперсія визначається співвідношенням $\sigma^2(U^2/H_1)=m_2\left(U^2/H_1\right)-m_1^2\left(U^2/H_1\right)$.

Отримані результати дозволяють оцінити й порівняти потенційні характеристики детектора Готелінґа з відповідними характеристиками інших виявників, які можна реалізувати в умовах відомого та невідомого завадового середовища.

ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Кендалл М., Стьюарт А. *Статистические выводы и связи.* М., Наука, 1973.
2. Рао С. Р. *Линейные статистические методы и их применения*. М., Наука, 1986.
3. Левин Б. Р. *Теоретические основы статистической радиотехники.* М., Радио и связь, 1989.

S. K. Enaki, V. A. Averochkin

Potential probabilistic and numerical characteristics of the Hotelling's statistics based on the quadrature components of an arbitrarily correlated gaussian random process.

The decisive Hotelling's statistic makes it possible to solve one of the important problems of modern radars, namely, the stabilization of the false alarm probability. Taking into account the digital implementation of processing, which usually involves the construction of decisive statistics based on the quadrature components of the input narrowband process, the report discusses the conditional potential probabilistic and numerical characteristics of the Hotelling's statistic based on quadrature components.

Keywords: Hotelling's statistic, potential characteristic, conditional densitie, mathematical expectation and variance.