УДК 004.622:004.627

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Д. т. н. А. А. Шумейко, В. А. Смородский

Днепродзержинский государственный технический университет
Украина, г. Днепродзержинск
shumeiko_a@ukr.net, smoria@live.com

Полученное дискретное тригонометрическое преобразование позволяет строить адаптивные фильтры, подстраивая их под область применения. Варьируя фазовый сдвиг, можно добиваться улучшения качества восстановления исходных данных в случае, если частотные коэффициенты подвергаются искажениям. Данное преобразование хорошо проявило себя в задаче сжатия изображений, показав лучшие результаты, чем дискретное косинусное преобразование.

Ключевые слова: ДКП, ДПФ, сигнал, фильтр.

Одним из основных инструментов, применяемых в теории обработки сигналов, является дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и, в частности, дискретное косинус-преобразование. Рассмотрим одну модификацию ДПФ, допускающую построение адаптивных фильтров. В основе полученных результатов лежит следующее утверждение.

Пусть $\varphi \in (0, \pi/2)$, тогда для любых $\{h_m\}_{m=0}^{N-1}$ таких, что $-\infty < h_m < \infty$, $m = 0,1,...,N-1$ положим $H_k = \sum_{m=0}^{N-1} h_m \cos\left(\frac{2\pi mk}{N} - \varphi\right)$;

имеет место равенство $h_n = \frac{2}{N\sin(2\varphi)} \sum_{k=0}^{N-1} H_k \sin\left(\frac{2\pi nk}{N} + \varphi\right)$.

Заметим, что при $\varphi = \pi/4$ мы получаем дискретное преобразование Хартли [1]:

$$H_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} h_k cas\left(\frac{2ik\pi}{N}\right), \text{ где } cas\varphi = \cos\varphi + \sin\varphi .$$

Заметим, что варьируя фазовый сдвиг φ, можно добиваться улучшения качества восстановления исходных данных в случае, если частотные коэффициенты подвергаются искажениям. Например, для $N = 8$ и при $(h_1 - h_3 + h_5 - h_7)(h_0 - h_2 + h_4 - h_6) \neq 0$, положим $H_6 = 0$, тогда выбирая $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{h_0 - h_2 + h_4 - h_6}{h_1 - h_3 + h_5 - h_7}\right)$ получим полное восстановление данных $\{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$.

Если же $H_7 = 0$, при условии

$$\left(h_1 + h_2\sqrt{2} + h_3 - h_5 - h_6\sqrt{2} - h_7\right)\left(h_0\sqrt{2} + h_1 - h_3 - h_4\sqrt{2} - h_5 + h_7\right) \neq 0$$

выбирая $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{h_0\sqrt{2} + h_1 - h_3 - h_4\sqrt{2} - h_5 + h_7}{h_1 + h_2\sqrt{2} + h_3 - h_5 - h_6\sqrt{2} - h_7}\right)$

также получим полное восстановление данных $\{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$.

Применение фазового сдвига для улучшения восстановления данных позволяет на основании полученного дискретного преобразования строить адаптивные фильтры, подстраивая фильтр не только для входных данных, но и, например, для используемого метода квантования или природы шума, вносящего искажения в сигнал.

Пусть для заданного N вместо $H_k(k=1,2,...,N-1)$ имеем их приближенные значения $\tilde{H}_k(k=1,2,...,N-1)$.

Получим восстановление исходных данных $\tilde{h}_n = \frac{2}{N\sin(2\varphi)}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{H}_k \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}+\varphi\right)$,

вычислим ошибку восстановления

$$\varepsilon(\varphi)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(h_n-\tilde{h}_n\right)^2=\sum_{n=0}^{N-1}\left(h_n-\frac{2}{N\sin(2\varphi)}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{H}_k\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}+\varphi\right)\right)^2$$

и найдем производную

$$\frac{d}{d\varphi}\varepsilon(\varphi)=-\frac{4}{N\sin(2\varphi)}\sum_{n=0}^{N-1}\left(h_n-\frac{2}{N\sin(2\varphi)}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{H}_k\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}+\varphi\right)\right)\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{H}_k\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}+\varphi\right).$$

Решая уравнение $\sum_{n=0}^{N-1}\left(N\sin(2\varphi)h_n-2\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{H}_k\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}+\varphi\right)\right)\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{H}_k\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}+\varphi\right)=0$,

найдем решение $\varphi_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, если же такого решения нет, то решение лежит на границе, то есть — дискретное косинус-преобразование или преобразование Хартли.

Заметим, что одной из популярных сфер использования дискретного косинус-преобразования (ДКП) есть обработка двумерных сигналов, то есть изображений. Например, один из наиболее популярных методов сжатия изображений — JPEG — основан на использовании ДКП на квадратах $N\times N$ пикселов, где N=8 [2], поэтому интересно использовать дискретное тригонометрическое преобразование в задаче сжатия изображений.

Двумерное дискретное тригонометрическое преобразование выглядит следующим образом:
— прямой ход

$$h_{i,j}=\frac{2}{N\sin(2\varphi)}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}p_{n,m}\cos\left(\frac{2\pi in}{N}-\varphi\right)\cos\left(\frac{2\pi jm}{N}-\psi\right),$$

— обратный ход

$$p_{n,m}=\frac{2}{N\sin(2\psi)}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}h_{i,j}\sin\left(\frac{2\pi in}{N}+\psi\right)\sin\left(\frac{2\pi jm}{N}+\varphi\right).$$

Полученное дискретное тригонометрическое преобразование позволяет строить адаптивные фильтры, основной областью применения является сжатие изображений. Изменяя фазовые сдвиги, можно добиться лучшего пикового отношения сигнала к шуму (PSNR), чем таковое у дискретного косинусного преобразования при одинаковом количестве данных. Данные сдвиги в дальнейшем можно вычеслять в автоматическом режиме для подбора необходимых значений под определенное изображение.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли.— Москва: Мир, 1990.
2. Лигун А. О., Шумейко О. О. Комп'ютерна графіка (обробка та стиск зображень): навч.посіб.— Дніпропетровськ: Біла К. О., 2010.

A.A. Shumeyko, V.A. Smorodsky

Usage of discrete trigonometric transform in digital signal processing

The obtained discrete trigonometric transformation allows one to build adaptive filters to suit their area of application. By varying the phase shift one can improve the quality of source data recovery in case the frequency coefficients undergo distortion. This transformation has proved itself in the problem of image compression, showing better results than the discrete cosine transform.

Keywords: *DTT, DCT, signal, filter.*