**УДК 004.61**

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЕ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМ «АГЕНТОМ»

Н. А. Лысенко

Одесский национальный политехнический университет
Украина, г. Одесса
rosenrotta@gmail.com

*Предложена математическая модель класса задач фронтального вытеснения для многокомпонентных систем с промежуточным «агентом» (рассмотрен и случай фильтрации «аномальных» жидкостей) в виде вариационного неравенства. Модель исследована на устойчивости фронтального вытеснения.*

*Ключевые слова: математическая модель, многокомпонетная система, фронтальное вытеснение.*

Информационные технологии, в общепринятом смысле [1], рассматриваются как совокупность средств и методов получения данных (информации) нового качества об изучаемом процессе или объекте. К таковым относятся средства и методы математического моделирования, причем, важным этапом последнего является составление и исследование математических моделей (ММ) процессов и объектов. В работе предложена ММ многокомпонентной фильтрующейся пластовой системы с промежуточным «агентом», обеспечивающая устойчивость фронтального вытеснения и характеризующаяся простой вычислительной реализацией.

Целью работы была разработка класса математических моделей процессов фильтрации многокомпонентных аномальных жидкостей на примере процесса вытеснения в многокомпонентной системе с промежуточным «агентом».

Условием, определяющим границу раздела диффундирующих компонент в случае совместной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей, может служить «скачок» насыщенности в функции Баклея—Леверетта [2 — 5]

$$J(S)=\frac{k_1^0(S_1)}{\mu_1 k_1^0(S_1)+\mu_2 k_2^0(S_2)}, \qquad (1)$$

где $k_1^0(S_1)$ и $k_2^0(S_2)$ — относительная фазовая проницаемость для фильтрующихся жидкостей; $\mu_1$ и $\mu_2$ — их вязкость; $s_1$ и $s_2$ — насыщенность порового пространства фильтрующимися жидкостями, соответственно.

Используя уравнение «скачка» насыщенности вида (1) и известные уравнения динамики процесса двухфазной фильтрации с предельным градиентом $G$, описывающие процесс фильтрации при отклонении от закона Дарси [6], была получена ММ процесса «поршневого» вытеснения в виде вариационного неравенства. При этом «поршнем» выступает промежуточный «агент», например, пена или полимер, являющиеся хорошим вытеснителем:

$$-\frac{m\partial S_1}{\partial t}(v-S_1)-\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_1)\left\{[1-S_1G_1]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dP_c}{dS_1}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_1)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+$$

$$+\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_1)\left\{[1-S_1G_1]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_1)\left\{[1-S_1G_1]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_1|\right]\right\}dz\ge\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_1}\zeta_j Q_{1_j}\ \ \forall v,\ S_1\in K\ , \qquad (2)$$

$$-\frac{m\partial S}{\partial t}-\frac{k_2\rho_2}{\mu_2}J(S)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{dP_c}{dS_2}\right]\right\}=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_2}\zeta_j Q_{2_j}\ , \qquad (3)$$

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega \frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\left\{[1-S_3G_3]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dP_c}{dS_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+$$

$$+\int_\Omega \frac{k_3\rho_3}{\mu_3} J(S_3)\left\{[1-S_3G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega \frac{k_3\rho_3}{\mu_3} J(S_3)\left\{[1-S_3G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\}dz \geq 0 \quad \forall v,\, S_3\in K\,. \qquad (4)$$

Начальные и граничные условия соответственно примут вид

$$S_l(0,z)=S_{l_0}(z),\quad l=\overline{1,3}\,, \qquad (5) \qquad\qquad \frac{\partial P}{\partial \eta}>0,\quad \frac{\partial P_c(S_3)}{\partial\eta}>0\,. \qquad (6)$$

В численной реализации ММ вида (2) — (6) представляет сложную вычислительную задачу, поскольку необходимо решать совместную систему дифференциальных уравнений динамики. Для упрощения численного решения использован следующий формальный прием.

На каждой из границ «вытесняющая компонента — промежуточный «агент»» и «промежуточный «агент» – вытесняемая компонента» выполняются соответственно очевидные условия $S_2=(1-S_3)$ и $S_1=(1-S_3)$. С учетом данных соотношений выражения (2) — (4) сводятся к виду

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1} J(S_3)\left\{S_3G_1\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dP_c}{dS_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+$$

$$+\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1} J(S_3)\left\{S_3G_1\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1} J(S_3)\left\{S_3G_1\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\}dz \geq \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_1}\zeta_j Q_j \qquad \forall v,\, S_1\in K\,, \qquad (7)$$

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}-\frac{k_2\rho_2}{\mu_2} J(S_3)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{dP_c}{dS_3}\right]\right\}=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_2}\zeta_j Q_j\,, \qquad (8)$$

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega \frac{k_3\rho_3}{\mu_3} J(S_3)\left\{[1-S_3G_3]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dP_c}{dS_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+$$

$$+\int_\Omega \frac{k_3\rho_3}{\mu_3} J(S_3)\left\{[1-S_3G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega \frac{k_3\rho_3}{\mu_3} J(S_3)\left\{[1-S_3G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\}dz \geq 0 \quad \forall v,\, S_1\in K\,. \qquad (9)$$

Очевидно, что система уравнений (7) — (9) с начальными (5) и граничными (6) условиями не является связанной.

Таким образом, исходная задача (2) — (6) «распадается» на две более простые задачи (7), (9), (5), (6) и (8), (9), (5), (6), которые можно решать последовательно, что сокращает время численного решения на 25—40%.

## ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ


1. Афанасьев В. Н., Постников А. И. Информационные технологии в управлении предприятием.— Москва: МЭИМ, 2004.
2. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. — Москва: Наука, 1975.
3. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем.— Москва: Недра, 1982.
4. Кричлоу Генри Б. Современная разработка нефтяных месторождений.— Москва: Недра, 1979.
5. Ахметов И. М., Шерстнев Н. М. Применение композитных систем в технологических операциях эксплуатации скважин.— Москва: Недра, 1989.
6. Верлань А. Ф., Положаенко С. А., Сербов Н. Г. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов.— Киев: Наукова думка, 2011.


---

N. A. Lysenko

**Mathematical modeling of filtration process in a multi-component system with an intermediate «agent».**

The paper offers a mathematical model of a class of problems of frontal displacement for multicomponent systems with an intermediate "agent" (the case of filtration of "anomalous" liquids is also considered) as a variational inequality. The model is investigated for the stability of the frontal displacement.

Keywords: *mathematical model, multicomponent system, frontal displacement.*