УДК 519.873

ЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

Д. т. н. В. И. Левин

Пензенский государственный технологический университет
Россия, г. Пенза
vilevin@mail.ru

Дана постановка задачи вычисления характеристики результата преобразования множеств, встречающаяся в распознавании образов, поиске в информационных массивах, проектировании вычислительных процессов. Предложено решение задачи с помощью аппарата алгебры логики.

Ключевые слова: преобразование множеств, автомат, динамика автоматов, непрерывная логика.

Известно, что традиционная теория множеств является фундаментом всей математики [1]. Эта теория позволяет решать целый ряд задач, в основном качественных, связанных с получением различных характеристик изучаемых множеств. Например, установление существования или несуществования формально определяемого множества; установление типа того или иного множества (конечное, счетное, континуум); нахождение в конкретных случаях размера (мощности) множества, полученного в результате операций над другими множествами по заданным размерам последних и т. д. Однако в настоящее время человеческая деятельность распространяется на ряд областей, которые непосредственно связаны не с теми или иными математическими дисциплинами, опирающимися на теорию множеств (анализ, алгебра, геометрия и т. д.), а с преобразованиями самих множеств. Такими областями являются распознавание образов, определение взаимоупорядоченности объектов и событий, поиск в информационных массивах, проектирование вычислительных процессов и другие [2]. Для работы в данных областях нужна другая – прикладная количественная и конструктивная теория множеств, позволяющая не только определять те или иные множества, но и эффективно вычислять как различные количественные характеристики множеств, полученных в результате операций над заданными множествами, так и сами результирующие множества. Такой теории сегодня, по-видимому, нет.

Возможны различные подходы к построению прикладной количественной и конструктивной теории множеств. В докладе предлагается автоматно-логический подход к построению такой теории. При этом конечный динамический автомат оказывается адекватной математической моделью различных операций над множествами, а алгебра непрерывной логики – адекватным математическим аппаратом для эффективного вычисления множества – результата этих операций.

Математическую постановку проблемы можно описать таким образом. Задана совокупность n непрерывных множеств $A_1,...,A_n$, имеющих вид последовательностей непересекающихся отрезков:

$$\begin{array}{l} A_1 = \{[a_{11}, b_{11}], [a_{12}, b_{12}], ..., [a_{1m_1}, b_{1m_1}]\}; \\ A_2 = \{[a_{21}, b_{21}], [a_{22}, b_{22}], ..., [a_{2m_2}, b_{2m_2}]\}; \\ \hdashline A_n = \{[a_{n1}, b_{n1}], [a_{n2}, b_{n2}], ..., [a_{nm_n}, b_{nm_n}]\}, \end{array} \tag{1}$$

который не ограничивает общности задания и изучения непрерывных множеств. Будем рассматривать некоторую заданную суперпозицию $\mathbf{F}$ обычных теоретико-множественных операций $\cup$ (объединение), $\cap$ (пересечение), $\overline{}$ (дополнение), совершаемых над заданной совокупностью $A = (A_1,...,A_n)$ множеств $A_1,...,A_n$. Очевидно, что любая из операций $\cup, \cap, \overline{}$ над множествами $A_1,...,A_n$ дает множество того же вида последовательности непересекающихся отрезков, что и каждое из $A_1,...,A_n$, т. е. вида (1). Отсюда следует, что и заданная суперпозиция $\mathbf{F}(A_1,...,A_n)$ операций $\cup, \cap, \overline{}$ над совокупностью множеств $A = (A_1,...,A_n)$ имеет результатом множество B того же вида (1), т. е.

$$B \equiv \mathbf{F}(A_1, A_2, ..., A_n) = [c_1, d_1], [c_2, d_2], ..., [c_N, d_N]\} . \qquad (2)$$

Проблема состоит в том, чтобы ответить на следующие четыре вопроса: 1) можно ли выразить результирующее множество B через исходные множества $A_1, ..., A_n$ в аналитической форме, т. е. выразить числовые параметры $c_k, d_k, k = \overline{1, N}$ множества B (2) в виде соответствующих функций $f_k, \varphi_k, k = \overline{1, N}$ от числовых параметров $a_{ij}, b_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m_i}$ исходных множеств $A_1, ..., A_n$ (1); 2) какова алгебра вещественных чисел, с помощью которой можно выразить функции $f_k, \varphi_k, k = \overline{1, N}$; 3) существует ли вообще алгоритм построения аналитических зависимостей $c_k, d_k, k = \overline{1, N}$ от $a_{ij}, b_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m_i}$:

$$c_k = f_k(a_{ij}, b_{ij}), \ d_k = \varphi_k(a_{ij}, b_{ij}), \quad k = \overline{1, N}, i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, m_i} \ ; \qquad (3)$$

4) каков этот алгоритм?

Ни одна из четырех сформулированных выше задач до сих пор не рассматривалась в литературе. Мы даем их решение, основанное на моделировании преобразования $\mathbf{F}$ множеств $A_1, ..., A_n$ в множество B эквивалентной операцией преобразования соответствующих множествам $A_1, ..., A_n$ временных процессов $A_1(t), A_2(t), ..., A_n(t)$ в соответствующий множеству B временной процесс $B(t)$ в некотором конечном динамическом автомате-модели. При этом поставленные задачи можно свести к соответствующим задачам теории конечных динамических автоматов, которые решаются с помощью разработанных в этой теории методов и математического аппарата [3].

Результаты проделанной работы показали, что математическая модель преобразования совокупности непрерывных множеств в новое непрерывное множество, имеющая вид конечного динамического автомата, совместно с математическим аппаратом непрерывной логики, используемым для количественного исследования указанной модели, представляет собой вполне адекватные средства построения конструктивной количественной теории множеств, ориентированной на самые разные приложения. Эта теория дает возможность не только формально определять те или иные множества, но и эффективно вычислять различные количественные характеристики множеств, полученных в результате тех или иных операций над заданными множествами, а также сами результирующие множества. Важной особенностью предлагаемой теории является аналитическая форма получаемых в ней результатов. Все это делает полезным и перспективным применение этой теории в различных областях.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Серпинский В. Теория множеств. – Москва: Мир, 1960.
2. Джордж Ф. Основы кибернетики. – Москва: Радио и связь, 1984.
3. Левин В. И. Введение в динамическую теорию конечных автоматов. – Рига: Зинатне, 1975.

V. I. Levin

Logical modeling of problems of the applied set theory.

The problem of calculating characteristics of the result of sets' transformations is formulated. This problem is connected with in pattern recognition, information searching and design of computing processes. The solution to the problem with the apparatus of logic algebra is proposed.

Keywords: *transformation of sets, automata, dynamics of automata, continuous logic.*
