УДК 519.873

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Д. т. н. В. И. Левин

Пензенский государственный технологический университет
Россия, г. Пенза
vilevin@mail.ru

Дана интервальная постановка задачи оптимизации в условиях неопределенности. Для решения задачи использована теория сравнения интервалов. Это позволяет свести задачу оптимизации в условиях неопределенности к паре обычных оптимизационных задач.

Ключевые слова: оптимизация, неопределенность, интервальная математика, детерминизация.

Большинство современных задач оптимизации систем решается в предположении детерминированных параметров оптимизируемой системы. Но на практике крупномасштабные системы в технике, экономике, социологии и т. д. имеют, как правило, недетерминированные параметры. Оптимизация таких систем выдвигает новые проблемы: сравнение недетерминированных величин, обобщение понятия оптимума для недетерминированного случая, выяснение условий его существования, конструирование алгоритмов его отыскания. В докладе дан обзор некоторых работ в этой области. Изучается наиболее простой и естественный случай, когда недетерминированность системы выражается в том, что ее параметры заданы с точностью до интервалов возможных значений. Интервальные оценки параметров обычно находятся экспертным путем либо с помощью приближенных вычислений или измерений. Общая задача оптимизации систем в интервальной постановке такова. Задана некоторая функция

$$y = f(\tilde{a}, x), \tag{1}$$

где $x = (x_1,..., x_n)$ – вектор аргументов, $x_i \in X$, $i = 1,..., n$ и X – числовое множество; $\tilde{a} = (\tilde{a}_1,..., \tilde{a}_n)$ – вектор интервальных параметров, т. е. $\tilde{a}_i$ – замкнутые интервалы $\tilde{a}_i = [a_{i1}, a_{i2}]$, в которых находятся все возможные значения этих параметров. Каждому значению аргумента $x, x \in X$, согласно (1), соответствует одно значение функции в виде некоторого интервала $\tilde{y} = f(\tilde{a}, x)$. Необходимо найти значение аргумента $x^*, x^* \in X$, для которого соответствующее значение функции $\tilde{y} = f(\tilde{a}, x^*)$ экстремально (максимально или минимально). Мы ограничимся задачами оптимизации, где множество X дискретно.

Для решения сформулированной задачи необходимо уметь сравнивать величины интервалов и выделять экстремальные из них. Сначала мы введем детерминированные операции непрерывной логики: $\vee = \max$ (дизъюнкция), $\wedge = \min$ (конъюнкция) и далее – соответствующие недетерминированные (в частности, интервальные) операции этой логики:

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} = \{a \vee b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \{a \wedge b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \tag{2}$$

где $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ – любые числовые множества (в частности, интервалы). Как видно из формул (2), дизъюнкция (конъюнкция) двух числовых множеств определяется как множество возможных значений дизъюнкции (конъюнкции) двух чисел в условиях, когда эти числа пробегают независимо друг от друга все возможные значения внутри соответствующих интервалов. Согласно [1], введем теперь отношение неравенства интервалов в виде следующей эквивалентности:

$$(\tilde{a} \ge \tilde{b}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}, \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b}). \tag{3}$$

Как известно [1], два интервала $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, такие, что $\tilde{a} \ge \tilde{b}$ или $\tilde{b} \ge \tilde{a}$, называются сравнимыми по отношению $\ge$, другие $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ называются несравнимыми по данному отношению. В системе интервалов $\tilde{a}_k, k = 1,..., n$ интервал $\tilde{a}_i$ называется максимальным (минимальным), если он сравним с интервалами $\tilde{a}_2,...,\tilde{a}_k$ по отношению $\geq$ и верны неравенства $\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2,...,\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_k$ $(\tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_2,...,\tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_k)$.

Теорема 1. Для того чтобы два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ были сравнимы в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ (несравнимы), необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система неравенств: $(a_1 \geq b_1, a_2 \geq b_2)$ (системы неравенств $(a_1 < b_1, a_2 > b_2)$ или $(b_1 < a_1, b_2 > a_2)$).

Теорема 2. Для того чтобы в системе интервалов $\tilde{a}_k = [a_{k1}, a_{k2}], k = 1,...,n$ интервал $\tilde{a}_1$ был максимальным, необходимо и достаточно выполнение условий $a_{11} = \bigvee_{k=1}^{n} a_{k1},\ a_{12} = \bigvee_{k=1}^{n} a_{k2}$, а для того чтобы $\tilde{a}_1$ был минимальным – выполнение условий $a_{11} = \bigwedge_{k=1}^{n} a_{k1},\ a_{12} = \bigwedge_{k=1}^{n} a_{k2}$.

Результаты теоремы 1 позволяют сравнивать интервалы, распространять на них понятие оптимума и выяснять условие существования такого оптимума. Результаты теоремы 2 позволяют строить алгоритмы выделения экстремальных интервалов, сводя их к алгоритмам выделения экстремальных точечных величин. Это позволяет сводить интервальные оптимизационные задачи к детерминированным, что и составляет основу для решения интервальных задач.

Подробные сведения о теории и методах оптимизации систем в условиях интервальной неопределенности можно найти в [2, 3].

Результаты проделанной работы показали, что проблема оптимизации неполностью определенных функций достаточно просто разрешима, если указанную неопределенность задавать в интервальной (т. е. определять функцию и ее аргументы с точностью до интервалов возможных значений) и использовать при этом конструктивную теорию сравнения величин интервалов, сводящую это сравнение к сравнению одноименных границ интервалов. В результате нахождение оптимума неполностью определенной функции удается свести к отысканию одноименного оптимума двух полностью определенных (детерминированных) функций – нижней граничной и верхней граничной функций, являющихся соответствующими границами оптимизируемой неполностью определенной функции. Наш исход, который естественно назвать детерминизацией, позволяет вполне строго свести оптимизацию неполностью определенных функций к хорошо известным и эффективным методам оптимизации полностью определенных функций.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Левин В. И. Сравнение интервальных величин и оптимизация неопределенных систем // Информационные технологии.– 1998.– № 7 – С. 22–32.

2. Левин В. И. Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Автоматика и телемеханика.– 1992.– № 7.– С. 97–106.

3. Левин В. И. Интервальные методы оптимизации систем в условиях неопределенности.– Пенза: Изд-во Пензенского технологического института, 1999.– 95 с.

V. I. Levin

Modelling and optimization of systems in conditions of uncertainty.

The problem of optimization under uncertainty conditions is formulated. To solve this problem, the theory of comparison of intervals is used. This approach reduces the problem of optimization under uncertainty to a pair of conventional optimization problems without uncertainty.

Keywords: *optimization, uncertainty, interval mathematics, determination.*