УДК 621.372

МЕТОД БЫСТРОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Д. т. н. В. А. Пономарев, к. т. н. О. В. Пономарева, Н. В. Пономарева

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
Россия, г. Ижевск
ponva@mail.ru

Дискретное преобразование Гильберта, широко используемое в цифровой обработке сигналов, может быть реализовано как во временной, так и в частотной области. Благодаря ряду преимуществ, частотный подход получил большое распространение во многих приложениях цифровой обработки сигналов. Однако данный подход обладает и существенным недостатком: необходимость выполнения обратного дискретного преобразования Фурье спектра, половина отсчетов которого равна нулю. В работе предлагается метод вычисления дискретного преобразования Гильберта в частотной области, устраняющий эту избыточность.

Ключевые слова: дискретное преобразование Гильберта, цифровая обработка сигналов, параметрическое обратное дискретное преобразование Фурье.

Дискретное преобразование Гильберта (ДПГ) находит самое широкое применение при цифровой обработке сигналов (ЦОС) в различных областях научно-практических исследований. Среди приложений ДПГ следует назвать такие области как: анализ нелинейных и нестационарных систем, квадратурная модуляция и демодуляция, обработка и анализ сигналов в радарах/сонарах, разработка приемников телевидения высокой четкости (High Definition TV - HDTV), сжатие аудиосигналов и цветных изображений, измерение мгновенных значений огибающей модулированных сигналов и т.д. [1]. ДПГ может быть реализовано как во временной, так и в частотной области. Частотный подход получения ДПГ благодаря ряду преимуществ, а также существованию алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) считается более предпочтительным [1]. Однако, у данного подхода имеется и существенный недостаток. Данный метод требует обнуления на отрицательных частотах коэффициентов дискретного преобразования Фурье (ДПФ) входного сигнала. В результате алгоритмы обратного ДПФ работают очень неэффективно (во-первых половина памяти тратится не хранение нулевых значений, во-вторых выполняются операции с нулевыми отсчетами, которые бесполезны).

Целью работы является разработка метода вычисления дискретного преобразования Гильберта в частотной области, свободного от указанных недостатков.

Алгоритм ДПГ в частотной области заключается в следующем [1]:

- выполнение прямого ДПФ методом БПФ: $S_N = \frac{1}{N} F_N X_N$, (1)
- формирование нового спектра: Y_N,
- выполнение обратного ДПФ методом обратного БПФ: $X_N^{\grave{A}\tilde{N}} = \frac{1}{N} F_N^{\ *} Y_N$; (2)

где * — знак комплексного сопряжения, $X_N = [x(0), x(1),....., x(N-1)]^T$ — представление дискретного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в виде вектора *N*-мерного линейного пространства; *T* — знак транспонирования; $S_N = [s(0), s(1),..., s(N-1)]^T$ — вектор коэффициентов разложения X_N по системе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), задаваемой матрицей F_N, X_N^{AC} — аналитический сигнал, соответствующий $x(n)$, $Y_N = [y(0) = s(0), 2\cdot s(1),.....,2\cdot s(N/2), y(N/2+1) = 0,...y(N-1) = 0]^T$,

$$F_N = \begin{array}{r} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N-1) \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (N-1) \end{array} \quad n \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & W_N^1 & . & . & W_N^{(N-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & W_N^{(N-1)} & . & . & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \\ \end{array}, \qquad W_N = \exp(-j\frac{2\pi}{N}). \qquad (3)$$

При выполнении обратного ДПФ (2) происходит усечение столбцов матрицы F_N^*, и матрица из квадратной превращается в прямоугольную размером $N \times N/2+1$. Применив к множеству номеров строк матрицы F_N^* отношение сравнимости по модулю 2 [3], получим два подмножества классов вычетов по модулю 2, мощность каждого из которых равна M. Используя полученное разбиение, переупорядочим множество строк матрицы F_N^* и представим ее в виде двух блочных матриц H, $M = N/2$:

$$H_{[M\times(M+1)],\ \theta} = \begin{array}{r} \\ 0 \\ . \\ (M-1) \\ \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & (M-1) & M \end{array} \quad n \\ \begin{bmatrix} 1 & W_M^{-\theta} & . & . & W_M^{-\theta(M-1)} & \cos 2\pi\theta \\ . & . & . & . & . & \cos 2\pi\theta \\ 1 & W_M^{-(M-1+\theta)} & . & . & W_M^{-(M-1+\theta)(M-1)} & \cos 2\pi\theta \\ & & & & & \cos 2\pi\theta \end{bmatrix} \\ \end{array}, \quad \theta = 0{,}1/2. \qquad (4)$$

Матрицы $H_{[M\times(M+1)],\ 0}$ и $H_{[M\times(M+1)],\ 1/2}$ без учета M -го столбца (его учет легко реализовать либо во временной либо в частотной области) с точностью до знака совпадает с параметрическим дискретным преобразованием Фурье (ДПФ-П), свойства которого подробно исследованы в работах [2. 3]. В предлагаемом методе на последнем этапе алгоритма ДПГ в частотной области (2) необходимо выполнять не обратное БПФ размером N, а два параметрических БПФ (БПФ-П) размером $N/2$.

Можно показать, что предлагаемый метод дает экономию оперативной памяти в два раза, позволяет распараллеливать процесс и уменьшает число вычислений по сравнению со стандартным методом ДПГ в $[\log_2(M)/\log_2(N)]$ раз.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1.Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов.— Москва: ООО «Бином-Пресс» , 2007.

2. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов.— 2011.— № 1.— Стр. 2-6.

3. Пономарева О. В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических дискретных экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов.— 2010.— № 2.— Стр. 7—12.

V. A. Ponomarev, O. V. Ponomareva, N. V. Ponomareva

Rapid calculating method for the discrete Hilbert transform in the frequency domain.

Discrete Hilbert transform, which is widely used in digital signal processing, can be implemented in both time and frequency domains. Due to a number of advantages, the frequency approach became very common in many applications of digital signal processing. However, this approach has a significant disadvantage: the need for performing an inverse discrete Fourier transform, having half of the spectrum samples equal to zero. This paper proposes a method for calculating the discrete Hilbert transform in the frequency domain, which eliminates this redundancy.

Keywords: *discrete Hilbert transform, digital signal processing, parametric inverse discrete Fourier transform.*