УДК 519.21

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА КОНТРОЛЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Д. т. н. Е. Л. Даниленко

Одесский национальный политехнический университет
Украина, г. Одесса
sankirillo@yahoo.com

Разработаны математические модели контроля функционирования сложных систем, которые имеют актуальное значение для широкого круга приложений, например при управлении многомашинными комплексами и компьютерными сетями, оценке их эффективности и надежности.

Ключевые слова: сложная система, контролируемая система, случайные процессы.

Задачи оценки надежности и контроля качества стимулировали создание научных школ, основателями которых стали выдающиеся математики и мыслители современности А. Н. Колмогоров, Б. В. Гнеденко и их ученики. За короткий период в Советском Союзе были создана теория статистического контроля качества [1—3]. Конечно, следует отметить, что важное влияние оказало развитие прикладных математико-статистических методов в США, например, по подсчетам профессора Фримена из Массачусетского технологического института [3], только статистический приемочный контроль давал промышленности США более 20 миллиардов долларов в ценах 2001 года, то есть 0,8% валового внутреннего продукта. Создание теории статистического контроля качества повлияло на следующую постановку задачи разработки математических моделей контроля сложных систем [4].

Предположим, что сложная система функционирует в режиме непрерывного времени t и ее состояние в момент времени t описывается случайным процессом $\xi(t)$ со значениями в множестве X. Назовем сложную систему к о н т р о л и р у е м о й, если ее множество состояний разбивается на множество подконтрольных состояний X_1 и множество неподконтрольных состояний X_1, то есть $X = X_0 \bigcup X_1$, $X_0 \bigcap X_1 = \varnothing, X_0 \neq \varnothing, X_1 \neq \varnothing$. П о д к о н т р о л ь н ы м состоянием $x^0 \in X_0$ назовем такое состояние системы, которое соответствует заранее установленному регламенту. Например, в контрольных картах [4, 5] такими состояниями являются те, для которых показатель карты лежит внутри допустимой области (в контрольных границах), а для вычислительного комплекса это могут быть состояния технической исправности его основных элементов. Отметим, что среди неподконтрольных состояний $x^1 \in X_1$ могут быть и состояния отказа системы, попадание в которые означает выход ее из строя, но предполагается, что такие состояния являются восстанавливаемыми.

Обозначим вероятность пребывания системы в множестве подконтрольных состояний X_0 через p, а противоположную вероятность пребывания системы в множестве неподконтрольных состояний X_1 — через $q = 1 - p$. Задачу поиска множества подконтрольных состояний X_0 при фиксированной вероятности p назовем прямой задачей контроля сложной системы (задачей установления контрольных границ). Задачу поиска вероятности p при фиксированном множестве X_0 назовем обратной задачей. В докладе для различных типов случайных процессов $\xi(t)$ решаются прямая и обратная задачи контроля сложной системы, рассматриваются статистические задачи, например [6, 7].

Пусть $\xi(t)$ — стохастически непрерывная, регулярная, неоднородная во времени цепь Маркова со значениями в измеримом дискретном пространстве (X, B(X)), где B(X) – борелевская σ-алгебра подмножеств X, и матрицей непрерывных локальных переходных вероятностей (инфинитеземальной матрицей) $Q(t) = \| q_{\alpha\beta}(t) \|$, $(\alpha, \beta) \in X^2$; $q_{\alpha\beta}(t) \geq 0, \alpha \neq \beta, \sum_{\beta \in X} q_{\alpha\beta}(t) = 0$, $\alpha \in X$. Обозначим $Q^{ij}(t) = \| q_{\alpha\beta}(t) \|$, $P_{ij}(t,s) = \| p_{\alpha\beta}(t,s) \|$; $(\alpha, \beta) \in X_i \times X_j, (i, j = 0,1)$; $\Pi_j(t,s) = \| \pi_{\alpha\beta}{}^j(t,s) \|$, $(\alpha, \beta) \in X_j{}^2\,(j = 0,1)$;

$p_{\alpha\beta}(t,s) = P\{\xi(s) = \beta | \xi(t) = \alpha\}$, $\pi_{\alpha\beta}{}^{j}(t,s) = P\{\xi(s) = \beta,\ \xi(u) \in X_j, t \le u \le s | \xi(t) = \alpha\}$.

Тогда искомые матрицы переходных вероятностей $P_{00}(t,s)$ и $P_{01}(t,s)$ находятся посредством резольвенты или приближенного решения интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода $P_{00}(t,s) = \Pi_0(t,s) + \int_t^s P_{00}(t,u)L^0(u,s)du$. $P_{01}(t,s) = \int_t^s P_{00}(t,u)Q^{01}(u)\Pi_1(u,s)du$. $L^0(u,s) = Q^{01}(u)\int_u^s \Pi_1(u,\mathrm{v})Q^{10}(\mathrm{v})\Pi_0(\mathrm{v},s)d\mathrm{v}$.

Рассмотрим частный случай, когда контролируемая система описывается однородной, локально регулярной цепью Маркова $\xi(t)$ с непрерывным временем, конечным множеством состояний $X = \{1,...,n\} = X_0 \oplus X_1,\ X_0 = \{1,...,m\},\ X_1 = \{m+1,...,n\}, m<n$ и матрицей локальных переходных вероятностей $Q = \|q_{ij}\|,\ q_{ij} \ge 0,\ (i \ne j),\ \sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 0,\ i = \overline{1,n}$.

Назовем контролируемую систему р е г у л я р н о й, если множества подконтрольных и неподконтрольных состояний являются сообщающимися, т. е. $P\{\exists t > 0 : \xi(t) \in X_{1-k} \mid \xi(0) \in X_k\} > 0, k = 0{,}1,$ и из любого подмножества $\tilde{X}_1 \subset X_1$ возможен переход в его дополнение $X_1 \setminus \tilde{X}_1 \subset X_1$ без выхода в множество X_0, то есть $P\{\exists t : \forall \tau : [0,t]\ \xi(\tau) \in X_1, \xi(t) \in \tilde{X}_1 \mid \xi(0) \in \tilde{X}_1\} > 0.$ Последнее условие интерпретируется как условие х о р о ш е й п о д н а л а ж и в а е м о с т и системы в неподконтрольных состояниях.

Теорема. Если цепь Маркова $\xi_0(t)$ регулярной контролируемой системы с конечным множеством состояний эргодична, то эргодична и цепь Маркова $\xi(t)$, а вектор-строка ее финальных вероятностей имеет вид $q = (\|q_0 R\|_1)^{-1} q_0 R$, где $R = \|E_0 \vdots -Q_{01}Q_{11}{}^{-1}\|$, q_0 — вектор-строка финальных вероятностей цепи $\xi_0(t)$, E_0 – единичная матрица порядка m, $|q_0 R|_1$ – сумма элементов вектор-строки $q_0 R$.

Свойство эргодичности контролируемой системы представляет основной интерес для реальных приложений, так как состоит в асимптотическом постоянстве вероятностей пребывания в множествах подконтрольных и неподконтрольных состояний и отсутствии зависимости от начального состояния.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности.— М.: Советское радио, 1962. — 552 с.

2. Беляев Ю. К. — Вероятностные методы выборочного контроля.— М.: Наука, 1975. — 408 с.

3. Гнеденко Б. В. — Математика и контроль качества продукции.— М.: Знание, 1978.— 64 с.

4. Даниленко Е. Л. Стохастические модели контроля сложных технических систем (монография). Рукопись, депонированная в ВИНИТИ 13.06.84. № деп. 3891-84.— 279 с.

5. Даниленко Е. Л. Математико-статистические методы оперативного контроля случайных процессов // Исследование операций и АСУ. — Вып.19.— Киев: Вища школа.— 1982.— С. 31—39.

6. Даниленко Е. Л. Марковская модель оперативного контроля сложной системы // Известия АН СССР.— Техническая кибернетика.— 1983.— № 6.— С. 176—182.

7. Даниленко Е. Л. Моделирование контроля сложной системы // Информатика и математические методы в моделировании.— 2012.— № 4.— С. 363—373.

E. L. Danilenko

Theory and practice of complex systems control.

The authors offer mathematical models of complex systems control, which have a topical value for the wide circle of applications, for example, controlling multiple computer complexes and computer networks, their efficiency and reliability estimation, choosing optimum points.

Keywords: *complex system control, controlled system, random processes.*