УДК 681.327.12

ФОРМАЛИЗОВАННОЕ ОПИСАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРОЦЕССОРНЫМИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫМИ СРЕДСТВАМИ

К. т. н. О. В. Пономарева, к. э. н. А. В. Пономарев, Н. В. Пономарева

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова
Россия, г. Ижевск
ponva@mail.ru

Приведен анализ современного состояния формализованного описания измерительных процедур при статистических измерениях. Выявлены проблемы в определении погрешностей результатов измерения, реализуемых процессорными измерительными средствами. Предложена методология определения характеристик погрешностей результатов измерения.

Ключевые слова: процессорные измерительные средства, теория статистических измерений, уравнение измерений, гипотетический алгоритм, адекватный алгоритм.

Как известно, в метрологии основу измерительных процедур, реализуемых процессорными измерительными средствами (ПрИС), составляет решение двух задач [1]:

- разработки алгоритмического обеспечения, которое является базой прикладного измерительного обеспечения;
- разработки методологии определения погрешностей (характеристик погрешностей) результатов измерения.

При решении второй задачи возникают проблемы, появление которых связано со своеобразной ситуацией сложившейся в настоящее время в теории статистических измерений.

Во-первых, в силу целого ряда преимуществ ПрИС перед известными измерительными средствами, первые находят самое широкое применение в статистических измерениях.

Во-вторых, в основах теории статистических измерений специфика применения ПрИС освещена недостаточно полно [2, 3].

В-третьих, при разработке формализованного описания измерительных процедур, осуществляемых ПрИС, вопрос специфики применения ПрИС в статистических измерениях, к сожалению, также отражается не в полной мере.

В работе предлагается методология, которую можно рассматривать как дальнейшее развитие известных подходов к формализованному описанию измерительных процедур при статистических измерениях, в частности, при измерении спектральных функций дискретных случайных процессов [3, 4].

В качестве исходного объекта теории измерений вероятностных характеристик (теория статистических измерений) предполагается некоторый физический процесс. При этом, в силу широкого применения в составе измерительной цепи процессорных средств, наиболее естественной формой представления физического процесса является совокупность последовательностей:

$$X(t_j) = \{\ x_i(t_j)\ \}, \tag{1}$$

где $\left[\ i=\overline{1,\infty}\,;\ j=\overline{1,\infty}\right] \vee \left[\ i=\overline{1,\infty}\,;\ j\in\{\ j\ \}\ \right] \vee \left[\ i\in\{\ i\ \}, j=\overline{1,\infty}\right]$

При этом вероятностные характеристики случайного процесса выражаются через пределы выборочных средних:

$$\theta\left[X(t_j)\right] = \lim_{d\to\infty}\theta^*\left[X(t_j)\right] = \lim_{d\to\infty} S_d\left[g\left[X(t_j)\right]\ \right] = \lim_{N_1\to\infty}\frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1} g\left[x_i(t_j)\right], \tag{2}$$

$$\theta\left[X(t_j)\right]=\lim_{d\to\infty}\theta^*\left[X(t_j)\right]=\lim_{d\to\infty}S_d\left[g\left[X(t_j)\right]\ \right]=\lim_{N_2\to\infty}\frac{1}{N_2}\sum_{j=1}^{N_2}g\left[x_i(t_j)\right], \tag{3}$$

$$\theta\left[X(t_j)\right]=\lim_{d\to\infty}\theta^*\left[X(t_j)\right]=\lim_{d\to\infty}S_d\left[g\left[X(t_j)\right]\ \right]=\lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty}}\frac{1}{N_1N_2}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}g\left[x_i(t_j)\right], \tag{4}$$

где $g\left[X(t_j)\right]$ — оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики;

S_d — оператор усреднения:

$$S_d=\left[\frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1}\ \right]\ \vee\ \left[\frac{1}{N_2}\sum_{j=1}^{N_2}\ \right]\ \vee\ \left[\frac{1}{N_1N_2}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\ \right]; \tag{5}$$

d — параметр, характеризующий объем используемых при определении $\theta\left[X(t_j)\right]$ выборочных данных:

$$d=\left[N_1\right]\ \vee\ \left[N_2\right]\ \vee\left[N_1N_2\right];$$

$\theta^*\left[X(t_j)\right]$ — оценка вероятностной характеристики;

$\vee$ — символ исключающего ИЛИ.

Отметим, что соотношения (2), (3), (4) задают соответственно t-текущие, k-текущие и средние вероятностные характеристики случайного процесса $X(t_j)$, сходимость к пределу понимается как сходимость по вероятности.

В теории статистических измерений при определении той или иной вероятностной характеристики случайного процесса всегда требуется выполнение двух операций: собственно преобразования $g\left[X(t_j)\right]$ и усреднения S_d по некоторой выборке $\left[X_k(t_j)\right]$.

Основное уравнение измерений при этом может быть представлено как

$$\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=S_d\,g\left[X_k(t_j)\right], \tag{6}$$

где $X_k(t_j)$ — массив выборочных данных в k-м измерительном эксперименте.

При формализованном описании измерительных процедур, результатов измерения и характеристик результатов измерения, выполняемых ПрИС, основное уравнение измерения записывается в следующем виде:

$$\lambda_o^*=S_d\left[R_2KR_1\gamma(t)\right], \tag{7}$$

где R_1 — преобразования, выполняемые в аналоговой форме;

K — сравнение величины $R_1\vec{\gamma}$ с образцовой величиной (аналого-цифровое преобразование);

R_2 — преобразования, выполняемые в цифровой форме;

$\gamma(t)$ — входное воздействие — носитель информации о значении определяемой величины λ_j.

Для измерения статистических характеристик случайных процессов (в частности спектральных функций), учитывая уравнения (6) и (7), основное уравнение измерений может быть записано в виде

$$\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=S_dR_2KR_1\left[X_k(t_j)\right]. \tag{8}$$

Отличие реализуемых преобразований от идеальных, задаваемых уравнением (8), приводит к уравнению «неидеальных» измерений:

$$\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=S_d^HR_2^HK^HR_1^H\left[X_k(t_j)\right]. \tag{9}$$

Используя понятие алгоритма гипотетического измерения, получение истинного значения вероятностной характеристики $\theta\left[X(t_j)\right]$ определяется уравнением «гипотетического» измерения:

$$\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=S_d^{\Gamma}R_2^{\Gamma}K^{\Gamma}R_1^{\Gamma}\left[X_k(t_j)\right]. \tag{10}$$

Введем в рассмотрение еще один вид основного уравнения измерений (уравнение «адекватного» измерения), который позволяет находить оценки вероятностной характеристики случайного процесса $X(t_j)$ с помощью адекватного алгоритма (алгоритм измерения называется адекватным, если он позволяет получить состоятельные и несмещенные оценки):

$$\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=S_d^A R_2^A K^A R_1^A\left[X_k(t_j)\right], \tag{11}$$

где S_d^A, R_2^A, K^A, R_1^A — аналоги операторов S_d, R_2, K, R_1, соответственно, отличие заключается в том, что вводимые операторы есть операторы адекватного алгоритма.

Отметим, что

$$\lim_{d\to\infty} S_d^A\, g^A\left[X_k(t_j)\right]=S_d^\Gamma g^\Gamma\left[X_k(t_j)\right]$$

представляет собой, по сути, гипотетический алгоритм определения вероятностной характеристики $\theta\left[X(t_j)\right]$.

Основные уравнения (8)—(11) позволяют ввести следующую структуру погрешностей измерения статистических измерений на базе ПрИС:

— полная погрешность $\Delta\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=S_d^H R_2^H K^H R_1^H\left[X_k(t_j)\right]-S_d^\Gamma R_2^\Gamma K^\Gamma R_1^\Gamma\left[X_k(t_j)\right]$; (12)

составляющие полной погрешности:

— погрешность из-за ограничений на предельно достижимое значение параметра сходимости адекватного алгоритма к гипотетическому алгоритму измерений

$$\Delta_{nc}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=S_d^A R_2^A K^A R_1^A\left[X_k(t_j)\right]-S_d^\Gamma R_2^\Gamma K^\Gamma R_1^\Gamma\left[X_k(t_j)\right]; \tag{13}$$

— погрешность из-за неадекватности применяемого алгоритма измерения

$$\Delta_{na}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=S_d R_2 K R_1\left[X_k(t_j)\right]-S_d^A R_2^A K^A R_1^A\left[X_k(t_j)\right]; \tag{14}$$

— погрешность из-за неидеальности реализации преобразований

$$\Delta_{nu}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=S_d^H R_2^H K^H R_1^H\left[X_k(t_j)\right]-S_d R_2 K R_1\left[X_k(t_j)\right]. \tag{15}$$

Из соотношений (12)—(15) непосредственно следует, что рассмотренные составляющие представляют полную группу составляющих:

$$\Delta\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=\Delta_{nc}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]+\Delta_{na}\theta_k^*\left[X_k(t_j)\right]+\Delta_{nu}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]. \tag{16}$$

Представим полную погрешность $\Delta\theta_k^*\left[X(t_j)\right]$ в виде полной группы четырех составляющих погрешности:

$$\Delta\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=\Delta_1\theta_k^*\left[X(t_j)\right]+\Delta_k\theta_k^*\left[X_k(t_j)\right]+\Delta_2\theta_k^*\left[X(t_j)\right]+\Delta_s\theta_k^*\left[X(t_j)\right], \tag{17}$$

где $\Delta_1\theta_k^*\left[X(t_j)\right]; \Delta_k\theta_k^*\left[X_k(t_j)\right]; \Delta_2\theta_k^*\left[X(t_j)\right]; \Delta_s\theta_k^*\left[X(t_j)\right]$ — погрешности, вызванные отличием операторов R_1^H, K^H, R_2^H, S_d^H от операторов $R_1^\Gamma, K^\Gamma, R_2^\Gamma, S_d^\Gamma$ соответственно.

Разложение может быть выполнено несколькими способами (о количестве способов будет сказано ниже), например

$$\Delta_1\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=S_d^H R_2^H K^H R_1^H\left[X_k(t_j)\right]-S_d^H R_2^H K^H R_1^\Gamma\left[X_k(t_j)\right], \tag{18}$$

$$\Delta_k\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=S_d^H R_2^H K^H R_1^\Gamma\left[X_k(t_j)\right]-S_d^H R_2^H K^\Gamma R_1^\Gamma\left[X_k(t_j)\right], \tag{19}$$

$$\Delta_2\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=S_d^H R_2^H K^\Gamma R_1^\Gamma\left[X_k(t_j)\right]-S_d^H R_2^\Gamma K^\Gamma R_1^\Gamma\left[X_k(t_j)\right], \tag{20}$$

$$\Delta_s\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=S_d^H R_2^\Gamma K^\Gamma R_1^\Gamma\left[X_k(t_j)\right]-S_d^\Gamma R_2^\Gamma K^\Gamma R_1^\Gamma\left[X_k(t_j)\right]. \tag{21}$$

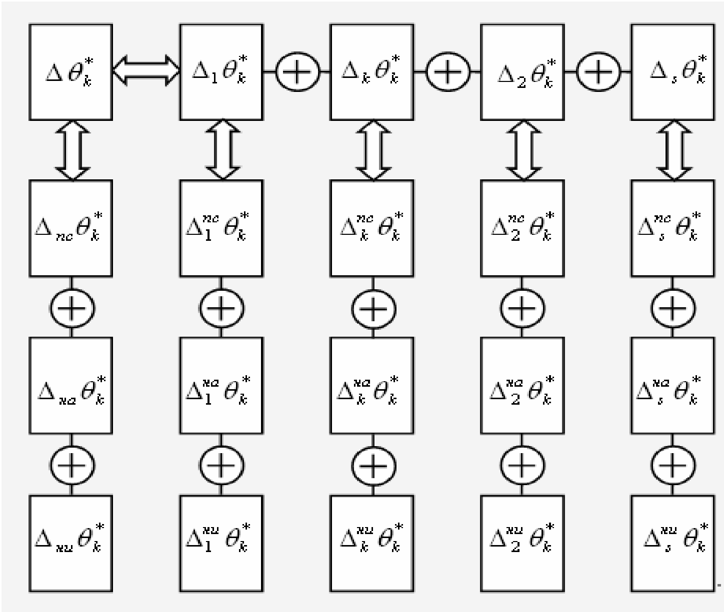
Каждую из составляющих $\Delta_1\theta_k^*\left[X(t_j)\right]$, $\Delta_2\theta_k^*\left[X(t_j)\right]$, $\Delta_k\theta_k^*\left[X(t_j)\right]$, $\Delta_s\theta_k^*\left[X(t_j)\right]$ можно, в свою очередь, также разложить в полную группу составляющих погрешности:

$$\Delta_1\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=\Delta_1^{nc}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]+\Delta_1^{na}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]+\Delta_1^{nu}\theta_k^*\left[X(t_j)\right], \tag{22}$$

$$\Delta_k\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=\Delta_k^{nc}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]+\Delta_k^{na}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]+\Delta_k^{nu}\theta_k^*\left[X(t_j)\right], \tag{23}$$

$$\Delta_2\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=\Delta_2^{nc}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]+\Delta_2^{na}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]+\Delta_2^{nu}\theta_k^*\left[X(t_j)\right], \tag{24}$$

$$\Delta_s\theta_k^*\left[X(t_j)\right]=\Delta_s^{nc}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]+\Delta_s^{na}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]+\Delta_s^{nu}\theta_k^*\left[X(t_j)\right]. \tag{25}$$



Структура полных групп составляющих полной погрешности

Структура рассмотренных групп составляющих соответствующих погрешностей приведена на рисунке.

Порядок определения формального описания составляющих погрешности может быть следующим: сначала определяется одна, любая из погрешностей, затем сумма выбранной погрешности с любой из оставшихся трех и т. д. Естественно, что формальное описание той или иной погрешности, а затем и их сумм, связывается со смыслом, который вкладывается в ту или иную погрешность (жесткая фиксация вида оператора, по которому определяется погрешность, в нашем случае индекс «н» в уменьшаемом и индекс «г» в вычитаемом). Число способов разложения погрешностей в соответствующие полные группы составляющих равно факториалу числа составляющих в полной группе. Предлагаемый путь сокращения числа возможных способов разложения погрешностей заключается в том, что при разложении погрешностей часть операторов может рассматриваться как единое целое.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Цветков Э. И. Основы теории статистических измерений.– Ленинград: Энергия, 1979.
2. Цветков Э. И. Процессорные измерительные средства.– Ленинград: Энергоатомиздат, 1989.
3. Пономарева О. В. Оценивание спектров случайных сигналов методом параметрического ДПФ // Труды 13-й междунар. конфер. «Цифровая обработка сигналов и ее применение».— Россия, Москва.—2011.— Выпуск XIII-1.— С. 150–153.
4. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автометрия. АН ССР (СО).– 1983.– № 4.– С. 39–45.

O.V. Ponomareva, A.V. Ponomarev, N.V. Ponomareva

Formalized description of the errors in the measurement of probability characteristics of random processes by processor measuring equipment.

The paper presents the analysis of the current state of formalized description of measuring procedures in statistical measurements. The authors reveal the problems in the error estimation in the measurements realized by processor measuring equipment. The methodology for the determination of characteristics of the measurement errors is introduced.

Keywords: *CPU measurement means, statistical measurements theory, measurement equation, hypothetical, adequate algorithm.*