

УДК 536.24

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМОВ В ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

К. ф.- м. н. В. И. Гаврыш, к. ф.-м. н. С. И. Качан

Национальный университет «Львовская политехника»

Украина, г. Львов

ikni.pz@gmail.com

*Решена нелинейная граничная стационарная задача теплопроводности для изотропной термочувствительной бесконечной пластины с теплоизолирующими лицевыми поверхностями, в которой находится тепловыделяющее инородное сквозное включение. Предложено преобразование и кусочно-линейная аппроксимация температуры на граничной поверхности включения.*

*Ключевые слова: изотропная термочувствительная бесконечная пластина, инородное сквозное включение, кусочно-линейная аппроксимация, теплопроводность, идеальный тепловой контакт.*

Проблема достоверного определения температурного состояния элементов конструкций электронных устройств является в современной технике одной из важнейших. От успешного ее решения зависят возможности повышения надежности, эффективности и ресурса работы электронных устройств и их теплонапряженных узлов. Высокие эксплуатационные параметры современных теплонапряженных конструкций часто приводят к необходимости рассмотрения нелинейных задач в силу зависимости теплофизических характеристик материалов конструкции от температуры и условий теплообмена от температуры ее поверхности. Расчеты температурных полей, выполненные на основе линейных математических моделей процесса теплопроводности, не всегда приводят к удовлетворительным результатам, особенно в тех случаях, когда температура изменяется в значительном диапазоне. Поэтому для разработки наиболее адекватной реальному процессу математической модели необходимо учитывать зависимость от температуры теплофизических характеристик материалов.

В настоящей работе рассматривается структура, которая описывается изотропной (в смысле теплофизических параметров) термочувствительной (теплофизические параметры зависят от температуры) бесконечной пластиной толщиной  $2\delta$  с теплоизолированными лицевыми поверхностями  $|z|=\delta$ . В пластине находится инородное тепловыделяющее сквозное параллелепипедное включение объемом  $8hl\delta$ . Эта пластина отнесена к декартовой прямоугольной системе координат  $(x, y, z)$  с началом в центре включения. На поверхности включения осуществляется идеальный тепловой контакт, а на граничных поверхностях пластины заданы граничные условия второго рода.

Распределение стационарного температурного поля  $t(x, y)$  в рассматриваемой системе можно получить, решив нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(x, t) \frac{\partial t}{\partial x} \right] + \lambda(x, t) \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = -q_0 S_-(h - |x|) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$t|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{|y|=l} = 0,$$

где  $\lambda(x, t) = \lambda_1(t) + [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] S_-(h - |x|)$  — коэффициент теплопроводности неоднородной термочувствительной пластины;  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_0(t)$  — коэффициенты теплопроводности основного материала и включения соответственно;  $q_0$  — мощность равномерно распределенных внутренних источников тепла;  $S_-(\zeta)$  — асимметрическая единичная функция.

Вводится преобразование

$$\vartheta = \int_0^{t(x,y)} \lambda_1(\zeta) d\zeta + S_-(h-|x|) \cdot \int_{t(\pm h,y)}^{t(x,y)} [\lambda_0(\zeta) - \lambda_1(\zeta)] d\zeta, \quad (2)$$

с помощью которого уравнение (1) приводится к виду

$$\Delta \vartheta + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] \frac{\partial t}{\partial y} \right\} \Big|_{|x|=h} \cdot S_-(h-|x|) = -q_0 S_-(h-|x|),$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа.

С помощью кусочно-линейной аппроксимации температуры  $t(\pm h, y)$  выражением

$$t(\pm h, y) = t_1^\pm + \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1}^\pm - t_j^\pm) \cdot S_-(y - y_j),$$

где  $y_j \in ]-l; l[$ ;  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n-1}$ ;  $t_j^\pm$  ( $j = \overline{1, n}$ ) — неизвестные аппроксимирующие значения, получено линейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно функции  $\vartheta$

$$\Delta \vartheta = - \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1}^\pm - t_j^\pm) \cdot [\lambda_0(t_{j+1}^\pm) - \lambda_1(t_{j+1}^\pm)] \cdot \delta'_-(y - y_j) + q_0 \right\} \cdot S_-(h-|x|) \quad (3)$$

с граничным условием

$$\frac{d\vartheta}{dy} \Big|_{|y|=l} = 0. \quad (4)$$

С применением интегрального преобразования Фурье к граничной задаче (3), (4) получено ее численно-аналитическое решение в виде

$$\vartheta = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{\cos \xi x}{\xi} \cdot \sin \xi h \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1}^\pm - t_j^\pm) [\lambda_0(t_{j+1}^\pm) - \lambda_1(t_{j+1}^\pm)] \left[ \frac{\text{ch} \xi (y+l)}{\text{sh} 2\xi l} \text{sh} \xi (l - y_j) - \right. \right. \\ \left. \left. - \text{ch} \xi (y - y_j) \cdot S_-(y - y_j) \right] + \frac{q_0}{\xi^2} \right\} d\xi. \quad (5)$$

Подставив конкретные зависимости коэффициента теплопроводности от температуры для материалов пластины и включения в соотношение (2), (5) и сравнив полученные выражения функции на граничных поверхностях включения, авторы получили систему нелинейных уравнений для определения неизвестных аппроксимирующих значений температуры.

Искомое температурное поле для рассматриваемой системы определяется с помощью нелинейного уравнения, полученного из соотношений (2), (5) после подстановки в них конкретных выражений зависимости коэффициента теплопроводности от температуры для материалов пластины и включения.

Таким образом, рассмотрение зависимости коэффициента теплопроводности от температуры для материалов пластины и включения в виде  $\lambda = \lambda^0(1 - kt)$  позволило получить расчетные формулы и сделан численный анализ температурного поля в рассматриваемой системе.

V. Gavrysh, S. Kachan

### Modeling of temperature conditions for thermosensitive elements of temperature transducers

The nonlinear boundary steady state problem of heat conduction for an isotropic thermosensitive infinite plate with heat-insulating front surfaces, which includes heat-generating foreign reach-through inclusion, is solved using the entered conversion and piecewise-linear approximation of temperature on the boundary surface of the inclusion.

Keywords: *isotropic thermosensitive infinite plate, foreign reach-through inclusion, piecewise-linear approximation, heat conduction, ideal thermal contact.*