

УДК 519.15

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ ШТЕЙНЕРА

Д. т. н. С. Ю. Лузин, С. И. Попов, Ю. И. Попов

ООО «ЭРЕМЕКС»  
Россия, г. Санкт-Петербург  
luzin@eremex.com

*Предложен подход к построению деревьев Штейнера с учетом областей, в которых прокладка соединений запрещена. Подход основан на динамическом перестроении сети соединений без дополнительных вершин путем добавления точек ветвления и перемещения их в оптимальные положения с использованием силового алгоритма.*

*Ключевые слова: топологическая трассировка, деревья Штейнера, силовой алгоритм*

При проектировании коммуникаций (дорог, линий электропередач, трубопроводов, соединений на печатной плате) возникает необходимость построения сети минимальной длины. В теории графов известны эффективные (полиномиальные) алгоритмы Краскала и Прима решения задачи построения минимального остовного дерева [1]. Однако в большинстве случаев введение дополнительных вершин позволяет получить сеть меньшей длины. Деревья с дополнительными вершинами называют деревьями Штейнера [2]. В отличие от задачи построения минимального остовного дерева, для задачи Штейнера (поиск деревьев Штейнера минимальной длины) не известны полиномиальные по сложности методы решения [3, 4].

В дереве Штейнера все соединения должны быть отрезками, соединяющими вершины (терминальные и дополнительные). В каждой дополнительной вершине должны сходиться три отрезка, а в терминальных – не более трех. Угол между отрезками, сходящимися в одной точке, не должен быть меньше  $120^\circ$ . Построить дерево Штейнера с выполнением перечисленных достаточных условий нетрудно, но оно не обязательно будет минимальным (рис. 1).

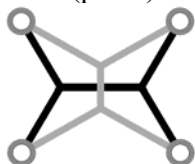


Рис. 1. Минимальное (черный цвет) и неминимальное (серый цвет) деревья Штейнера

Если четыре терминальные вершины образуют выпуклый четырехугольник, критерий минимальности прост: пары терминальных вершин, соединенные с дополнительной, должны быть расположены напротив острых углов, образованных диагоналями четырехугольника [2]. Если диагонали ортогональны, оба дерева имеют одинаковую длину.

При проектировании реальных коммуникаций необходимо учитывать наличие различного рода препятствий, что, к сожалению, ограничивает возможность использования как алгоритмов построения минимального остовного дерева (рис. 2, а), так и геометрических методов построения деревьев Штейнера (рис. 2, б).

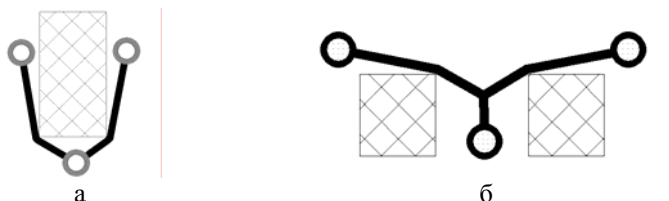


Рис. 2. Минимальные сети при наличии препятствий: а — остовное дерево; б — дерево Штейнера

В работе предлагается альтернативный подход, основанный на динамическом перестроении сети соединений, не содержащей дополнительных вершин. Основной механизм – силовой алгоритм, который рассчитывает силы, действующие на дополнительные вершины, и итерационно перемещает их в точку равновесия.

Если соединения вершин содержат более одного отрезка (рис. 2, б), в качестве виртуальных терминальных вершин используются концы прямолинейных отрезков, выходящих из дополнительных вершин.

Если угол между парой сегментов, инцидентных одной вершине (терминальной или дополнительной) меньше  $120^\circ$  (рис. 3, а и в), нужно добавить точку ветвления (рис. 3, б и г). Оптимизируется положение вершин с использованием силового алгоритма (рис. 3, в и д).

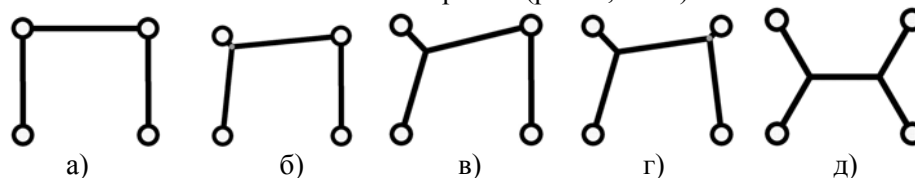


Рис. 3. Перестроение сети соединений

Если добавленная вершина оказалась смежной с другой добавленной, необходимо проверить минимальность четырехконтактной сети. Если четырехконтактная сеть не минимальна, выбирается пара “диагональных” (принадлежащих диагонали четырехугольника) терминальных либо виртуальных терминальных вершин. Отрезок, соединяющий терминальную (виртуальную терминальную) вершину с ближней к ней добавленной вершиной, заменяется отрезком, соединяющим терминальную (виртуальную терминальную) вершину с дальней добавленной (рис. 4, б). Оптимизируется положение вершин с использованием силового алгоритма (рис. 4, в).

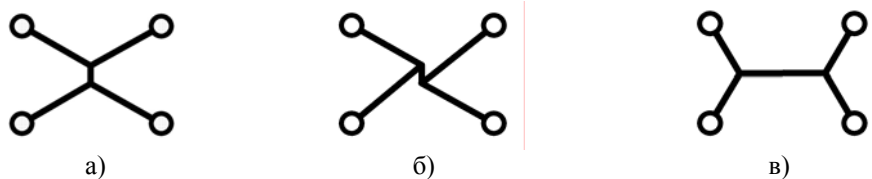


Рис. 4. Перестроение дерева Штейнера

Предложенный подход реализован в САПР ТороR. Он не гарантирует построение минимальной сети, но, в отличие от других подходов, позволяет при минимальных временных затратах минимизировать длину сети. При этом учитываются области, в которых прокладка соединений запрещена, а число терминальных вершин может быть произвольным.

#### ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Томас Х. Кормен и др. Алгоритмы: построение и анализ.— Москва: Издательский дом «Вильямс», 2007.
2. Синицин С. И. Евклидова задача Штейнера для четырех произвольных планарных терминальных точек // Graphicon 2002 proceedings, [http://graphicon2002.unn.ru/demo/2002/Sinitsin\\_Re.pdf](http://graphicon2002.unn.ru/demo/2002/Sinitsin_Re.pdf)
3. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.— Москва: Мир, 1982.
4. Melzak. Z. A. On the problem of Steiner // Canadian Mathematics Bulletin.— 1961.— N 4.— P. 143—149.

S. Yu. Luzin, S. I. Popov, Yu. I. Popov  
**Dynamic creation of Steiner trees.**

An approach is proposed for Steiner trees construction in the case of presence of areas through which the objects connecting is prohibited. The approach is based on a dynamic rebuilding of network connections without additional vertices by adding branch points, and moving them to the optimal position using the force-based algorithm.

Keywords: *topological routing, Steiner trees, force-based algorithm.*