

УДК 681.513

МНОГОСКОРОСТНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ЗАДАЧАХ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

К. т. н. А. Ю. Линович

Рязанский государственный радиотехнический университет

Россия, г. Рязань

rsreu-ryazan@yandex.ru

Обсуждаются результаты проведенных исследований эффективности применения метода максимума энтропии к задаче оптимизации структуры многоканального адаптивного фильтра в процессе выбора активных каналов на этапе начальной настройки.

Ключевые слова: метод максимума энтропии, многоскоростная обработка.

Идея принципа максимума энтропии как метода решения широкого круга физических задач при неполной информации была высказана в общем виде Э.Т. Джейнсом в 1957 году в работах, посвященных термодинамике. Затем этот принцип был конкретизирован Дж. Бергом применительно к анализу временных рядов. Метод максимума энтропии (ММЭ) противодействует неустойчивости обратных решений путем выбора максимально вырожденной оценки объекта, удовлетворительно согласующейся с экспериментальными данными. Формула, впервые полученная Бергом, является одним из самых красивых аналитических результатов математической статистики. Получаемая с ее помощью оценка спектра описывается «самой гладкой» функцией из всех функций, согласующихся с имеющимися данными. Эта оценка «надежна» в том смысле, что она не выявляет никаких деталей, для которых нет оснований в имеющихся данных. В данной статье рассматривается одна из попыток обобщения ММЭ на многоканальные системы с многоскоростной обработкой сигналов [1].

Целью работы является исследование метода оптимизации структуры многоканального адаптивного фильтра (МДФ) [2] по критерию максимума энтропии [3, 4].

Примером практического приложения, в котором решается данная задача, служит сеть распределенных датчиков сбора информации [5]. Пусть измеряемый процесс представляет собой аналоговый сигнал $x(t)$. И пусть информация о сигнале $x(t)$ собирается сетью, состоящей из M датчиков. Каждый датчик выполняет аналого-цифровое преобразование, а подсистема централизованного сбора и обработки информации формирует оценку спектральной плотности мощности (СПМ) сигнала $x(t)$ на частоте дискретизации $f_{кв}$. Сигнал $x(t)$, распространяясь от источника информации к датчикам, претерпевает разнообразные искажения. Дискретизация поступающих на входы разных датчиков сигналов происходит в разные моменты времени. Сигналы, поступающие от датчиков, могут быть определены на пониженных частотах дискретизации: $f_{кв}/v_0, f_{кв}/v_1, \dots, f_{кв}/v_{M-1}$.

С математической точки зрения, для дальнейших рассуждений описанную здесь техническую систему удобно представить в форме подсистемы анализа [1], каждому каналу которой соответствует один датчик системы сбора информации (рис. 1). Подсистема анализа содержит M цифровых фильтров-демодуляторов или фильтров анализа $H_m(j\omega)$, где $m = 0, 1, \dots, M-1$, и M компрессоров, понижающих частоту дискретизации в v_m раз. Фильтры анализа $H_m(j\omega)$ выделяют разные частотные компоненты входного сигнала $x(n)$, определенного на частоте дискретизации $f_{кв}$.

На практике каждый датчик передает не сами дискретные отсчеты снимаемого сигнала $x_m(k)$, а отсчеты автокорреляционной функции (АКФ): $R_{x,m}(k)$, $k \in \{0, 1, \dots, N_{ак}-1\}$, где $N_{ак}$ — число передаваемых отсчетов. Поскольку АКФ обладает четной симметрией, достаточно передавать только центральный (нулевой) ее отсчет и отсчеты с положительными порядковыми номерами.

Теперь можно привести математическую формулировку решаемой задачи. Известны первые $N_{ак}$ отсчетов АКФ $R_{x,m}(k)$ для каждого из выходных сигналов $x_0(k), x_1(k), \dots, x_{M-1}(k)$, где M — число каналов подсистемы анализа (рис. 1). Среди всех возможных СПМ $P_x(e^{j\omega}) \in \Psi$ требуется выбрать СПМ $P_{x,опт}^{N_{ак}}(e^{j\omega})$, отвечающую условию (здесь H — энтропия):

$$P_{x,опт}^{N_{ак}}(e^{j\omega}) = \arg \max H(P_x(e^{j\omega})). \quad (1)$$

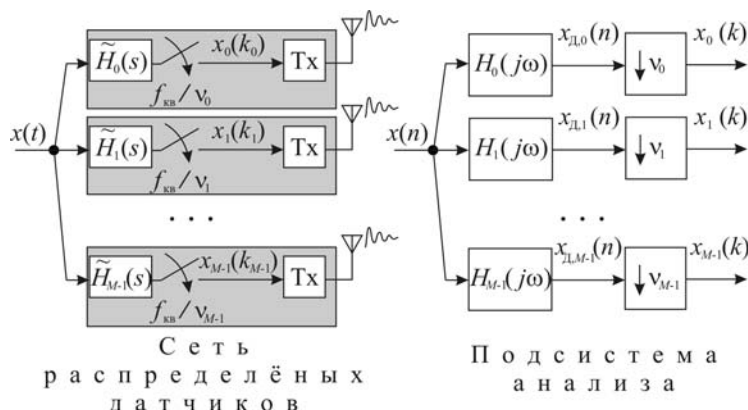


Рис. 1. Система распределенных датчиков сбора информации, работающих на пониженных частотах дискретизации, и подсистема анализа широкополосного цифрового сигнала

В (1) допустимое множество функций Ψ определяется как

$$\Psi \left\{ P_x(e^{j\omega}) : \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(e^{j\omega}) |H_m(e^{j\omega})|^2 e^{jN_m k \omega} d\omega = \rho_m(k) \forall \rho_m(k) \in \Gamma \\ & P_x(e^{j\omega}) \in L^1(-\pi, \pi); \\ & P_x(e^{j\omega}) \geq 0. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Здесь $\Gamma = \{\rho_m(k) : m = 0, 1, \dots, M-1, k = 0, 1, \dots, N_{ак}-1\}$ — множество известных коэффициентов АКФ $R_{x,m}(k)$, соответствующих сигналам $x_0(k), x_1(k), \dots, x_{M-1}(k)$, определенным на пониженных частотах дискретизации.

В большинстве практически решаемых задач по причине неточности получаемых оценок допустимое множество функций Ψ является пустым множеством, поэтому от (1) переходят к поиску псевдорешения, определяемого по критерию минимума среднего квадрата невязки. В итоге получаем новую формулировку, заключающуюся в минимизации целевой функции

$$J_{инф} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N_{ак}-1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|H_m(e^{j\omega})|^2 e^{jN_m k \omega}}{\sum_{l=0}^{M-1} |H_l(e^{j\omega})|^2 F_l(e^{jN_l k \omega})} d\omega - \rho_m(k) \right)^2. \quad (3)$$

Алгоритм решения поставленной задачи оценивания спектра с учетом введенного критерия минимизации (3) описан в табл. 1. К сожалению, непосредственная реализация на компьютере алгоритма в таком виде часто приводит к неправильным решениям. Причиной возникающих ошибок является плохая обусловленность при выполнении численного интегрирования на шаге 2. Учитывая симметричный вид АКФ вещественных сигналов, следует применять факторизацию по методу Фейера [3, 4]. Накладываемое при этом ограничение сужает множество допустимых решений задачи, но гарантирует, что $P_{x,опт}^{N_{ак}}(e^{j\omega}) \geq 0$. Подробное обоснование данного алгоритма можно найти в [5].

Ограничимся далее рассмотрением стационарного в широком смысле случайного процесса, подчиняющегося гауссовскому закону распределения. Кроме того, для определенности условимся рассматривать процессы с единичной СПМ. Наложённые ограничения часто встречаются в теории информации. Количество информации в данном случае определяется как

$$I(x) = D(P_x \| \bar{P}_x), \quad (4)$$

где $D(P_x \| \bar{P}_x)$ — информационная дивергенция Кульбака — Лейблера, а \bar{P}_x — «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Количество информации, содержащееся в спектральных составляющих $x_0(k), x_1(k), \dots, x_{M-1}(k)$ на выходе подсистемы анализа можем определить как предел дивергенции при $N_{ак} \rightarrow \infty$:

$$I(x_0, x_1, \dots, x_m) = \lim_{N_{ак} \rightarrow \infty} D(P_{x,опт}^{N_{ак}} \| \bar{P}_x). \quad (5)$$

Алгоритм оценивания СПМ по критерию максимума энтропии

Шаг	Выполняемое действие
1	Формирование вектора множителей Лагранжа: $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{0,0} & \lambda_{0,1} & \dots & \lambda_{0,N_{ак}-1} \\ \lambda_{1,0} & \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{1,N_{ак}-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{M-1,0} & \lambda_{M-1,1} & \dots & \lambda_{M-1,N_{ак}-1} \end{bmatrix}^T$.
2	Формирование функций: $g_{m,k}(\Lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ H_m(e^{j\omega}) ^2 e^{jN_m k \omega} d\omega}{\sum_{l_1=0}^{M-1} H_{l_1}(e^{j\omega}) ^2 \left(\sum_{l_2=0}^{N_{ак}-1} \lambda_{l_1 l_2} \cos(N_{l_1} \omega) \right)}$.
3	Нахождение $\Lambda_0 = \arg \min J(\Lambda)$ для $J(\Lambda) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N_{ак}-1} (g_{m,k}(\Lambda) - \rho_m(k))^2$.
4	Вычисление оптимальной СПМ: $P_{x,опт}^{N_{ак}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sum_{m=0}^{M-1} H_m(e^{j\omega}) ^2 \left(\sum_{k=0}^{N_{ак}-1} \lambda_{m,k}^{опт} \cos(N_m \omega) \right)}$, $\lambda_{m,k}^{опт}$ — элементы вектора Λ_0 , найденные на шаге 3.

Введенное определение дает возможность численно оценить долю каждой компоненты спектра в общем объеме получаемой информации, а также сравнить количество информации, получаемой по разным каналам МАФ.

В приведенных далее формулировках (6) и (7) воспользуемся обозначениями, принятыми в [1]. Пусть ACS — математический оператор, принадлежащий некоторому выбранному подклассу цифровых цепей G_{ACS}^P и позволяющий выполнять линейное преобразование пространства входных сигналов МАФ в пространство выходных реакций с заданной точностью. Пусть при его реализации требуется $V(G_{ACS}^P, ACS)$ вычислительных затрат в единицу времени, $Q(G_{ACS}^P, ACS)$ ячеек памяти и вносится собственный шум $\sigma^2(G_{ACS}^P, ACS)$. Прямая задача оптимального проектирования [1] структуры МАФ сводится к выбору такой совокупности (подмножества) каналов или такой последовательности каналов МАФ, при которой обеспечивается получение наибольшего объема собираемой информации при ограниченном числе каналов:

$$\begin{cases} \max I(\{x_i\}, i \in i_{дон}, 0 \leq i < M) ; \\ V(G_{ACS}^P, \overline{ACS}_P) \leq V_{доп} ; \\ Q(G_{ACS}^P, \overline{ACS}_P) \leq Q_{доп} ; \\ \sigma^2(G_{ACS}^P, \overline{ACS}_P) \leq \sigma_{доп}^2 . \end{cases} \quad (6)$$

Обратная задача оптимального проектирования [1] заключается в поиске такой структуры ACS , при которой достигается некоторый наперед заданный объем информации о наблюдаемом процессе при минимальном числе каналов:

$$\begin{cases} \min \Phi(G_{ACS}^P, \overline{ACS}_P) = \min_{G_{ACS}^P, \overline{ACS}_P} V(G_{ACS}^P, \overline{ACS}_P) ; \\ I(\{x_i\}, i \in i_{дон}, 0 \leq i < M) \geq I_{доп} ; \\ Q(G_{ACS}^P, \overline{ACS}_P) \leq Q_{доп} ; \\ \sigma^2(G_{ACS}^P, \overline{ACS}_P) \leq \sigma_{доп}^2 . \end{cases} \quad (7)$$

В приведенных выше формулах $I_{доп}$, $V_{доп}$, $Q_{доп}$ и $\sigma_{доп}^2$ — ограничения, наложенные на количество информации, объем вычислительных затрат, объем памяти, уровень собственного шума, соответственно.

Для проверки предложенного метода проводилось компьютерное моделирование. Для примера была составлена подсистема анализа из четырех рекурсивных фильтров (рис. 2). Коэффициенты децимации всех каналов были равны 4 ($v_0=v_1=v_2=v_3=4$). Входной сигнал $x(n)$ являлся гауссовским стационарным в широком смысле случайным процессом, сформированным низкочастотным фильтром, рассчитанным методом Юла-Уолкера в «MATLAB»: $[b, a] = \text{yulewalk}(10, [0.5 \ 0.8 \ 1], [1 \ 1 \ 0 \ 0])$. Результаты экспериментально найденных оценок количества информации при использовании четырех коэффициентов АКФ (в каждом канале) для выбранного 4-канального МАФ (рис. 2) представлены в табл. 2.

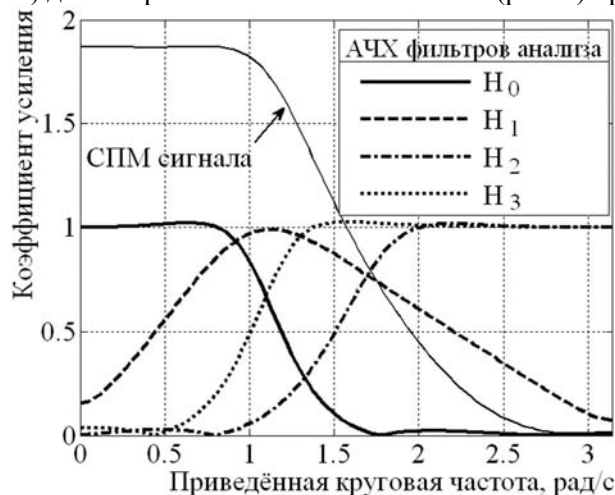


Рис. 2. АЧХ фильтров анализа и СПМ сигнала

Таблица 2

Результаты экспериментальной оценки количества информации $I(\{x_m\})$, собираемой при разных сочетаниях активных каналов МАФ

Номера каналов m	$I(\{x_m\})$	Номера каналов m	$I(\{x_m\})$	Номера каналов m	$I(\{x_m\})$
1	0,1044	1 и 3	0,1416	1, 2 и 3	0,2440
2	0,0429	1 и 4	0,1528	1, 2 и 4	0,1419
3	0,0101	2 и 3	0,1175	1, 3 и 4	0,3433
4	0,0101	2 и 4	0,2278	2, 3 и 4	0,3205
1 и 2	0,3637	3 и 4	0,0100	1, 2, 3, 4	0,3231

Из полученных результатов следует, что в данной системе достаточно информации, получаемой от двух активных каналов, имеющих номера 1 и 2.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Витязев В. В. Цифровая частотная селекция сигналов. — Москва: Радио и связь, 1993.
2. Робинсон Э. А. История развития теории спектрального оценивания // ТИИЭР. — 1982. — Т. 70, № 9. — С. 6 — 32.
3. Хайкин С., Карри Б. У., Кеслер С. Б. Спектральный анализ радиолокационных мешающих отражений методом максимальной энтропии // ТИИЭР. — 1982. — Т. 70, № 9. — С. 51 — 62.
4. Линович А. Ю. Методы многоскоростной обработки сигналов в многоканальных адаптивных фильтрах с самоорганизующейся структурой: эквалайзеры с динамическим выбором каналов // Цифровая обработка сигналов. — 2011. — № 1. — С. 28 — 37.
5. Jahromi O.S. Multirate statistical signal processing. — USA, New York: Springer, 2010.

A. Yu. Linovich

Multirate signal processing in spectrum analysis problems.

The paper presents the research results on the effectiveness of the maximum entropy method application in optimizing the structure of multi-channel adaptive filter in the selection of active channels during initial setup.

Keywords: *maximum entropy principle, multirate processing.*