

УДК 621.372

МОДИФИКАЦИЯ ФИЛЬТРА НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ ПУТЕМ ОБОБЩЕНИЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРЕКУРСИВНОГО ГРЕБЕНЧАТОГО ФИЛЬТРА

К. т. н. О. В. Пономарева, Н. В. Пономарева

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова
Россия, г. Ижевск
ponva@mail.ru

Предложено обобщение разностного уравнения нерекурсивного гребенчатого фильтра, которое позволяет разрешить ряд проблем, возникающих при проектировании и применении фильтров на основе частотной выборки.

Ключевые слова: гребенчатый фильтр, фильтр на основе частотной выборки, разностное уравнение, дискретный случайный процесс, спектр.

Характерной особенностью развития современной теории цифровой фильтрации является постоянно меняющаяся оценка эффективности применения в задачах анализа сигналов фильтров с бесконечной или конечной длинами импульсной характеристики (класса БИХ-фильтров и класса КИХ-фильтров соответственно). Одновременно мы видим и постоянную переоценку эффективности применения тех или иных структурных схем фильтров уже внутри этих двух больших классов фильтров.

Пример – это ситуация, сложившаяся с фильтрами на основе частотной выборки (ФОЧВ). В 70-е годы в связи с появлением мощного метода проектирования нерекурсивных КИХ-фильтров – метода Парка-Маклеллана ФОЧВ были забыты (более чем на 35 лет) настолько, что даже в курсах лекций и учебниках по цифровой обработке сигналов они упоминались вскользь либо не упоминались вообще [1, 2]. Однако в последнее время было доказано, что с вычислительной точки зрения ФОЧВ имеют преимущество перед фильтрами Парка-Маклеллана в тех приложениях, где требуемая ширина полосы пропускания проектируемого фильтра меньше одной пятой частоты дискретизации [2].

Класс фильтров на основе частотной выборки основан на том, что трансверсальный фильтр (фильтр с многоотводной линией задержки) [2], являясь фильтром без полюсов, может быть представлен в виде последовательной структуры, приведенной на рис. 1.

Следует отметить, что фильтры на основе частотной выборки эффективны не только при узкополосной фильтрации. Например, эффективность применения фильтров этого класса для скользящих спектральных измерений также весьма высока [3], так как структура ФОЧВ дает возможность рекуррентного расчета значений отсчетов на выходе k -го комплексного резонатора. В результате, после выхода фильтра на установившийся режим, для получения каждого значения скользящего спектрального измерения на k -й частоте необходимо выполнить всего два комплексных умножения на входной отсчет.

В то же время следует признать, что ФОЧВ имеют и серьезные недостатки, ограничивающие их применение во многих приложениях.

Первый из них – это фиксированность множества частот [1–3]: $\{2\pi k/N\}$, где $k = \overline{0, N-1}$, N – число отсчетов импульсной характеристики гребенчатого фильтра (рис. 1).

Этот недостаток является следствием фундаментального свойства амплитудно-частотной характеристики (АХЧ) гребенчатого фильтра, которая имеет N нулей, равномерно расположенных на единичной окружности в Z -плоскости с шагом $\frac{2\pi}{N}$.

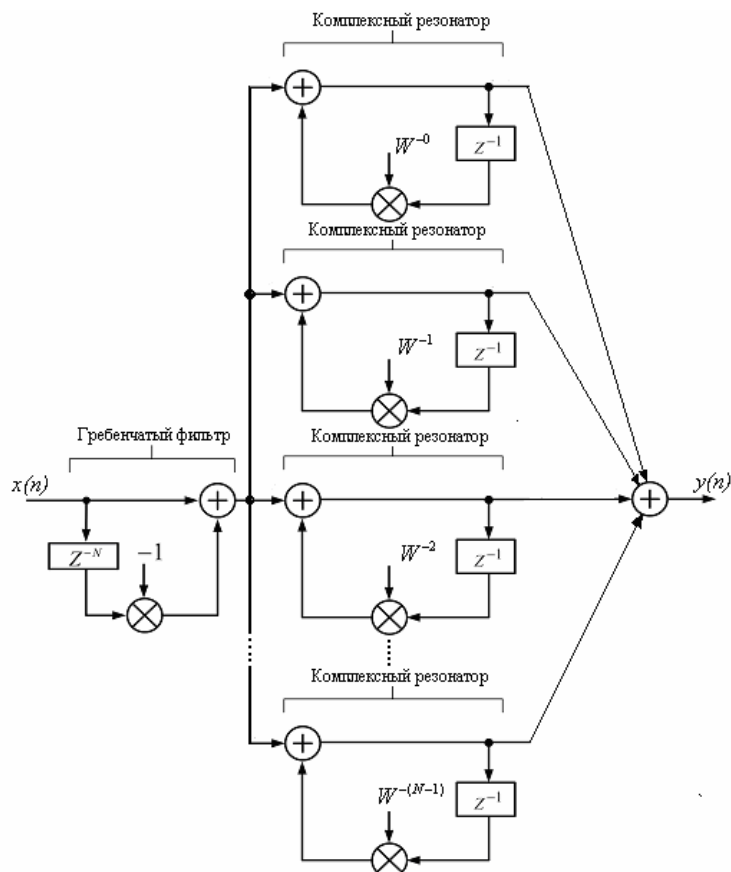


Рис. 1. Структурная схема фильтра на основе частотной выборки, где $W_N^k = \exp[-j2\pi / N]k$

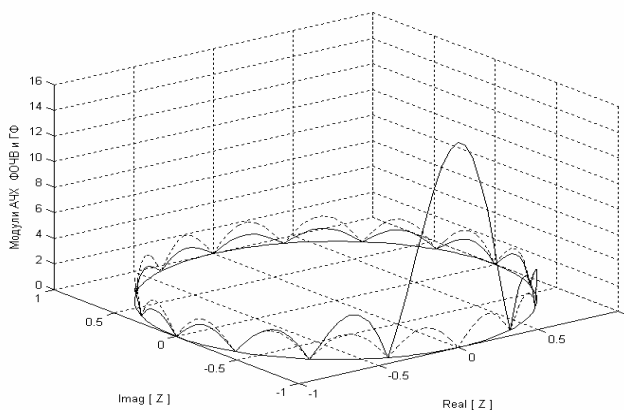


Рис. 2. АХЧ гребенчатого фильтра (пунктирная линия) и ФОЧВ (сплошная линия) в Z-плоскости вдоль единичной окружности, $N=16$

При этом полюс каждого из комплексных резонаторов ФОЧВ для компенсации должен совпадать с одним из нулей амплитудно-частотной характеристики гребенчатого фильтра (рис. 2).

Второй недостаток ФОЧВ связан с тем, что операции в параллельной части структуры (рис. 1) выполняются с конечной точностью [1]. Вследствие этого полностью скомпенсировать нули гребенчатого фильтра полюсами комплексных резонаторов не удастся (рис. 3). В результате ФОЧВ имеет и нули и полюса, а его импульсная характеристика становится неограниченной.

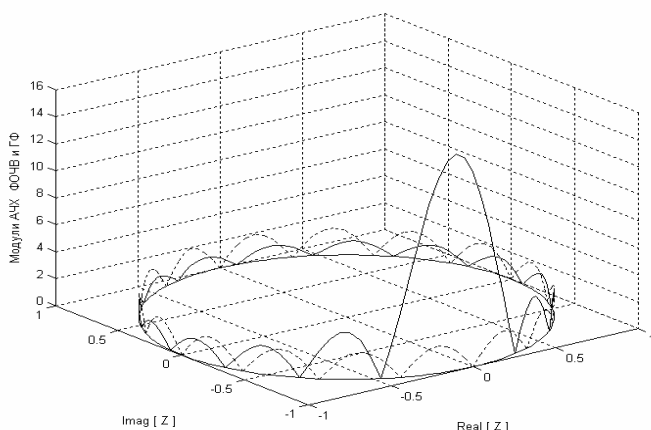


Рис. 3. АХЧ гребенчатого фильтра (пунктирная линия) и ФОЧВ (сплошная линия) в Z-плоскости вдоль единичной окружности при $N=16$ и рассогласовании $1/4$

С целью разработки способа устранения указанных выше недостатков ФОЧВ рассмотрим разностное уравнение, описывающее стандартный нерекursивный гребенчатый фильтр:

$$y(n) = x(n) - x(n - N), \quad (1)$$

где n – номер отсчета дискретной последовательности.

Передаточная функция гребенчатого фильтра имеет вид [1, 2]

$$H(z) = Y(z) / X(z) = 1 - z^{-N}, \quad (2)$$

а его частотная характеристика описывается следующим соотношением [1, 2]:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega N - \pi)/2} [2 \sin(\omega N / 2)], \quad (3)$$

где ω – круговая частота в диапазоне от 0 до 2π .

Проведем обобщение разностного уравнения, описывающего стандартный нерекursивный гребенчатый фильтр, в следующем виде:

$$y_1(n) = x(n) - e^{-j2\pi\theta} x(n - N), \quad \text{где } 0 \leq \theta < 1. \quad (4)$$

Нетрудно увидеть, что передаточная функция обобщенного гребенчатого фильтра имеет вид

$$H_1(z) = Y_1(z) / X(z) = 1 - e^{-j2\pi\theta} z^{-N}. \quad (5)$$

Учитывая, что частотная характеристика фильтра представляет собой передаточную функцию $H(z)$, вычисленную на единичной окружности, получим

$$H_1(e^{j\omega}) = H_1(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = (1 - e^{-j(N\omega + 2\pi\theta)}). \quad (6)$$

Используя тождество Эйлера

$$2j \sin(\alpha) = e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}, \quad (7)$$

преобразуем соотношение (6) к виду

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega N + 2\pi\theta)/2} \{2j \sin[(\omega N + 2\pi\theta) / 2]\}. \quad (8)$$

Заменяя в формуле (8) j в фигурных скобках на $e^{j\pi/2}$, окончательно получим

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega N + 2\pi\theta - \pi)/2} \{2 \sin[(\omega N + 2\pi\theta) / 2]\}. \quad (9)$$

Выражение (9) определяет частотную характеристику обобщенного гребенчатого фильтра. Импульсные характеристики обобщенного (при различных значениях параметра θ) и стандартного (параметр θ равен нулю) гребенчатых фильтров приведены на рис. 4.

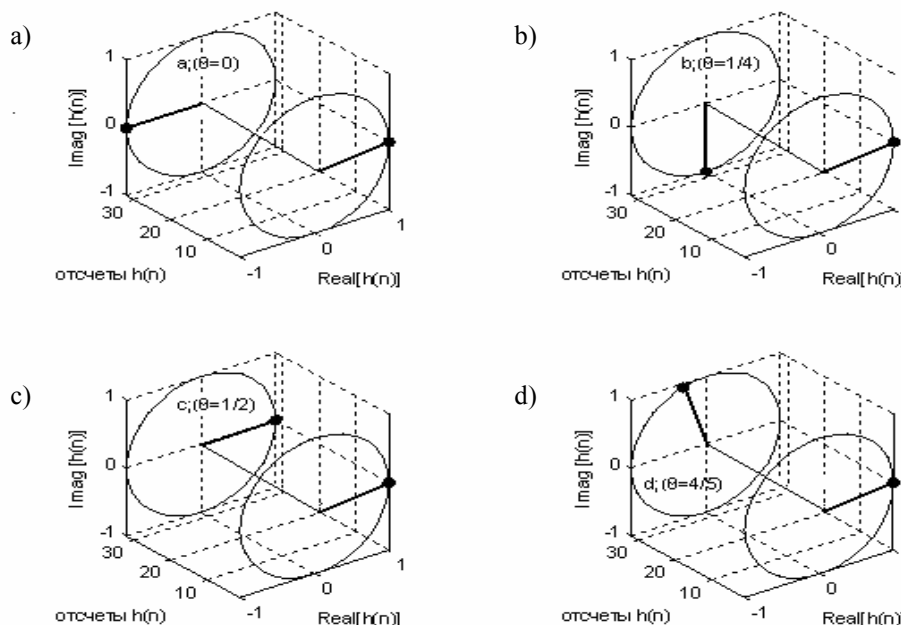


Рис. 4. Импульсные характеристики $h(n)$ длительностью в 32 отсчета стандартного гребенчатого фильтра (a) и обобщенного гребенчатого фильтра (b, c, d), при различных значениях параметра θ

Таким образом, обобщение разностного уравнения, описывающего стандартный нерекурсивный гребенчатый фильтр, позволило разрешить проблему фиксированности множества частот ФОЧВ за счет модификации структуры гребенчатого фильтра и модификации комплексных резонаторов в параллельной части структуры, приведенной на рис. 1.

Предложенное авторами обобщение разностного уравнения позволяет также решить и целый ряд проблем, возникающих при проектировании и применении гребенчатых фильтров и фильтров на основе частотной выборки.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.– Москва: Мир, 1978.
2. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов.– Москва: ООО «Бином-Пресс», 2007.
3. Пономарева О. В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базе параметрических дискретных экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов.– 2010.– № 2.– С. 7–12.

O. V. Ponomareva, N. V. Ponomareva

Filter modification based on frequency sampling by summarizing of the difference equation of nonrecursive comb filter.

The authors suggest the generalization of the difference equation of nonrecursive transversal (comb) filter, which allows one to resolve a number of problems encountered in the design and application of filters based on frequency sampling.

Keywords: *comb filter, a filter based on the frequency sampling, difference equations, discrete random process, spectrum.*