

Іван ГОРБАТИЙ, Олександр УСАТИЙ

Україна, м. Львів, Національний університет «Львівська політехніка»

E-mail: ivan.v.horbatyi@lpnu.ua, oleksandr.a.usaty@lpnu.ua

КВАНТОВИЙ ПІДХІД ДО ОЦІНКИ НАПРЯМКУ ПРИХОДУ СИГНАЛУ

Проаналізовано методи визначення напрямку приходу радіосигналу, зокрема алгоритми MUSIC та ESPRIT. Показано, що складність традиційних підходів зростає кубічно зі збільшенням кількості антен, що ускладнює їхнє застосування в масштабних системах. Запропоновано застосовувати квантові алгоритми для розв'язання систем лінійних рівнянь і знаходження власних значень, що дає можливість суттєво зменшити обчислювальні витрати. Розглянуто особливості оброблення комплексних матриць. Представлено таблицю порівняння класичного та квантового варіантів алгоритму з точки зору складності та структури обчислень.

Ключові слова: напрямку приходу сигналу, MUSIC, ESPRIT, обчислювальна складність, комплексні матриці, радіомоніторинг.

Завдання оцінювання напрямку приходу сигналу (англ. *direction of arrival, DOA*) є ключовим у сучасних системах зв'язку, радіолокації та радіомоніторингу. Зростання вимог до точності, стійкості до завад і здатності до опрацювання великої кількості джерел сигналів стимулює розвиток високоточної та обчислювально ефективної обробки сигналів. Серед алгоритмів високої роздільної здатності для оцінювання DOA найбільш поширеними є MUSIC (англ. *multiple signal classification*) та ESPRIT (англ. *estimation of signal parameters via rotational invariance techniques*) [1, 2]. Обидва методи базуються на обробленні коваріаційної матриці сигналів і використовують інформацію про її власний простір. Разом з тим, зі зростанням кількості антен їхня обчислювальна складність збільшується кубічно: $O(M^3)$, де M — кількість елементів антенної решітки [3, 4], що створює серйозні обмеження для реального використання у великих антенних решітках (наприклад, $M > 100$). На цьому тлі зростає інтерес до застосування у задачах DOA квантових обчислень, здатних забезпечити експоненційне прискорення деяких обчислювальних процедур.

На сьогодні квантові обчислення перебувають на етапі активного розвитку. Провідні компанії, такі як IBM, Google, Rigetti, IonQ та інші, вже створили квантові процесори з кількістю кубітів від кількох десятків до сотень. Наприклад, IBM заявляє про плани вийти на 1000+ кубітів у 2025 році. Утім реальні квантові обчислення залишаються обмеженими коротким часом когерентності та помилками зчитування. Більшість алгоритмів, зокрема QPE та HHL, вимагають ідеального або близького до ідеального контролю над кубітами, що наразі реалізовано лише частково.

Попри це гібридні класично-квантові підходи вже застосовуються для оптимізації, машинного навчання та симуляції фізичних систем. З погляду задач просторово-частотного аналізу, таких як DOA-оцінювання, поява квантових прискорювачів відкриває перспективу масштабування розв'язків до антенних решіток із тисячами елементів без втрати продуктивності. Проте практичне впровадження квантових варіантів MUSIC або ESPRIT наразі обмежується теоретичними моделями, що потребують удосконалення квантових апаратних платформ.

Теоретичну реалізацію алгоритму MUSIC у квантовій постановці, що зменшує складність до логарифмічного порядку, представлено, наприклад, у [5]. Це відкриває перспективи використання квантових технологій не лише для MUSIC, але й для ESPRIT, хоча наразі він майже не представлений у квантовому контексті. Крім традиційних підходів, у сучасній літературі активно розглядаються метаповерхневі [6–8] та гібридні [9, 10] алгоритми DOA-оцінки, а також алгоритми з використанням глибоких нейронних мереж [4]. Водночас їх реалізація часто потребує складного обладнання або значного навчального набору, що знижує адаптивність до нових сценаріїв.

Метою цієї роботи є аналіз обмежень традиційних DOA у контексті масштабування антенних решіток, а також дослідження потенціалу квантових обчислювальних підходів для підвищення ефективності обробки сигналів у задачах високої роздільної здатності.

Огляд класичних алгоритмів DOA

Алгоритм MUSIC є одним із найвідоміших методів надвисокої роздільної здатності, який базується на поділі простору власних векторів коваріаційної

матриці на сигнальний та шумовий [1, 2]. Метод дозволяє точно розділяти близько розташовані сигнали навіть при невеликій кількості даних, однак його ефективність значно погіршується у разі низького співвідношення сигнал/шум або при корельованих сигналах [3].

З метою підвищення обчислювальної ефективності класичного MUSIC у [1] було запропоновано поліпшений варіант із модифікованим розміщенням елементів у разі перехресної поляризації антен, що забезпечує зменшення навантаження без втрати точності. У [3] розширено можливості MUSIC на випадок широкосмугових сигналів через доплерівське мультиплексування, що є актуальним для MIMO-OFDM-радарів.

У роботах [2, 3] підкреслюється, що MUSIC є одним із найточніших класичних методів для розділення близько розташованих джерел або таких, що частково перекриваються. Підвищити його ефективність можна шляхом збільшення розмірності антенної решітки, але при масштабуванні антенної решітки (тобто збільшенні кількості її елементів) зростає також обчислювальне навантаження — переважно через побудову та спектральний аналіз коваріаційної матриці. Алгоритм ESPRIT базується на використанні інваріантності фазових зсувів між підмасивами антен. Він, на відміну від MUSIC, дозволяє уникнути пошуку максимумів у спектрі та забезпечує високу обчислювальну ефективність у малих масштабах [2]. Однак у випадку великої кількості джерел або за наявності кореляцій алгоритм потребує просторового згладжування або попередньої обробки [11].

У [2] ESPRIT позиціюється як один із провідних алгоритмів оцінювання DOA, хоча зазначено його меншу адаптивність до топології антенних решіток порівняно з MUSIC. В [11] підкреслюється, що адаптація ESPRIT до аналізу широкосмугових сигналів потребує спеціальних технік декореляції, що в умовах реального часу може бути обмежувальним чинником.

Ключовим викликом як для MUSIC, так і для ESPRIT, є обчислювальна складність [3, 5]. За сучасних умов вимоги до точності й кількості одночасно присутніх джерел, особливо в задачах спостереження за слабкими сигналами або дронами з модуляцією низької імовірності перехоплення вимагають аналізу в умовах, коли кількість антен складає понад 100, а іноді й доходить до 1000 [5]. Це стимулює пошук альтернатив класичним схемам.

Квантові обчислення у задачах DOA

При переході до масивів з сотнями або навіть тисячами елементів обсяг обчислень, пов'язаних з обробкою коваріаційної матриці, спектральним розкладенням та побудовою псевдоспектра, стає надмірним для традиційних (класичних) обчислювальних архітектур. У роботі [5] було вперше запропоновано квантову реалізацію MUSIC-алгоритму з

використанням підходів квантового глибокого пошуку (англ. *quantum amplitude amplification*, QAA) та квантового оцінювання фази (англ. *quantum phase estimation*, QPE). Згідно з авторською моделлю, складність побудови псевдоспектра можна зменшити з $O(M^3)$ у традиційному виконанні до $O(\text{poly}(\log M))$. Позначення $O(\text{poly}(\log M))$ означає, що складність алгоритму збільшується як поліном від $\log M$, тобто значно повільніше, ніж навіть лінійне зростання. Наприклад: якщо $M=1024$, то $\log_2 M=10$, тоді $\text{poly}(\log M)=(\log M)^3=1000$. Натомість класичне $M^3=1024^3=2^{30}$ — тобто понад мільярд операцій. Це ілюструє те, що квантові обчислення здатні не лише прискорити аналіз, а й зробити реальними ті конфігурації антен, які раніше вважались обчислювально недостижними. При цьому, запропонована у [5] квантова модель не тільки надає можливість ефективно опрацьовувати складні сценарії, а й зберігає точність оцінювання.

Отже, квантова обробка забезпечує експоненційний виграш у продуктивності, що є особливо важливим при великих розмірах антенних решіток або ж при великій (1000+) кількості антен, коли класичні методи перестають бути дієвими. Основною перевагою квантових обчислень є можливість оброблення суперпозиції всіх можливих станів одночасно, що дозволяє ефективно масштабувати обчислення при збільшенні розмірності задачі.

Одним із ключових інструментів у квантовому обчисленні є алгоритм Harrow – Hassidim – Lloyd (HHL), що дозволяє розв'язувати лінійні системи $Ax=b$ з експоненційною перевагою за складністю $O(\text{poly}(\log M))$ порівняно з класичними методами. Згідно з сучасними оглядами, алгоритм HHL є основою для спектральної обробки, квантового машинного навчання та оцінки власних значень у задачах сигнал-аналізу [12].

У той час як MUSIC вже має прототип квантової реалізації, алгоритм ESPRIT залишається значно менш дослідженим у цьому контексті. При цьому ESPRIT не потребує пошуку максимумів у спектрі та є лінійно обумовленим алгоритмом, його критичні операції — побудова підмасивів, обернення підпросторів і сингулярний розклад — можуть бути перенесені до квантової постановки через техніки квантової лінійної алгебри, але публікацій про його повноцінну реалізацію у відкритих наукових джерелах ще немає.

Квантові алгоритми та їх застосування в ESPRIT

Квантове перетворення Фур'є (QFT) є аналогом дискретного перетворення Фур'є для квантових станів. Його дія полягає в перетворенні базисних станів, що можна подати у такій формі:

$$|x\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \exp(2\pi i x k / 2^n) |k\rangle. \quad (1)$$

Обернене перетворення (QFT^{-1}) перетворює фазову інформацію у формат, придатний для вимірювання:

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \exp(2\pi i x k / 2^n) |k\rangle \rightarrow |x\rangle. \quad (2)$$

Алгоритм квантового оцінювання фази (QPE) оцінює фазу ϕ у задачі вигляду

$$U|\psi\rangle = \exp(2\pi i \phi) |\psi\rangle, \quad (3)$$

де $U, |\psi\rangle$ — унітарний оператор та його власний вектор;
 $\phi \in [0, 1)$ — фаза (власне значення у вигляді експоненти).

Основні етапи QPE

1. Підготовка двох регістрів:
 — перший (фазовий) складається з n кубітів — ініціалізація у стан $|0\rangle^{\otimes n}$;
 — другий (цільовий) містить $|\psi\rangle$, тобто власний вектор U .

2. Застосування гейту Адамара до кожного кубіта фазового регістру — створення суперпозиції.

3. Застосування операторів U^{2^k} (де $k=0, 1, \dots, n-1$) до цільового регістра — кодування фази у фазовий регістр.

4. Обернене квантове перетворення Фур'є (QFT^{-1}) до фазового регістру — перетворення фазової інформації у вимірювану бітову послідовність.

5. Вимірювання фазового регістру — оцінювання фази ϕ з точністю до $1/2^n$.

Результатом застосування алгоритму є наближення фази

$$|\psi\rangle \rightarrow \sum_j \alpha_j |\phi_j\rangle |\psi_j\rangle. \quad (4)$$

Алгоритм ННЛ — це квантовий аналог класичних чисельних методів для розв'язання систем лінійних рівнянь, що був представлений ще у 2009 році. Його метою є побудова квантового стану, пропорційного розв'язку

$$A\vec{x} = \vec{b}; A \in C^{N \times N}, \vec{b} \in C^N, \quad (5)$$

де A — ермітова матриця, яка має позитивно визначені та обмежені власні значення. Це гарантує можливість її спектрального розкладання, що є ключовою умовою застосування алгоритму ННЛ. Така форма забезпечує унітарність оператора еволюції та дозволяє ефективно використовувати квантове оцінювання фази для знаходження власних значень.

Основні етапи ННЛ

1. Представлення вхідного вектора у вигляді квантового стану

$$|b\rangle = \sum_j \beta_j |\psi_j\rangle; A|\psi_j\rangle = \lambda_j |\psi_j\rangle, \quad (6)$$

де λ_j — власні значення, відповідні векторам $|\psi_j\rangle$.

2. Застосування алгоритму QPE з метою отримання власних значень матриці A .

3. Квантове обернення власних значень: до регістра, що містить власні значення λ_j , застосовується операція обернення за допомогою допоміжного кубіта та керованої зворотної функції:

$$A^{-1}|b\rangle = \sum_j \frac{\beta_j}{\lambda_j} |\psi_j\rangle. \quad (7)$$

4. Завершальним етапом є квантове вимірювання результату, що дозволяє відновити шуканий розв'язок системи у вигляді квантового стану.

Інтеграція ННЛ і QPE в алгоритм ESPRIT

Класичний алгоритм ESPRIT використовує розв'язання задачі на власні значення матриці $\Phi = \Psi_1^{-1} \Psi_2$, де Ψ_1 та Ψ_2 — підматриці сигналового підпростору, сформовані зсувом елементів решітки. Власні значення цієї матриці $\lambda_k = \exp(j\theta_k)$ безпосередньо пов'язані з напрямками приходу сигналу θ_k . Для обчислення $\Psi_1^{-1} \Psi_2$ кожен k -й стовпець p_k матриці розв'язується у квантовому форматі:

$$\vec{x}_k = \Psi_1^{-1} \vec{p}_k; \quad (8)$$

де x — вектор власного стану, що реконструюється з кутової інформації, закодованої у фазах матриці Φ .

Оскільки матриця Ψ_1 є неермітовою і комплексною, для застосування ННЛ необхідно виконати її ермітове вбудовування

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_1 \\ \Psi_1^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

що дозволяє працювати з ермітовою матрицею у ННЛ.

Альтернативним підходом є розкладання Ψ_1 на дійсну та уявну частини, що дозволяє обчислювати компоненти окремо:

$$\Psi_1 = A_r + iA_i; \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} A_r & -A_i \\ A_i & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(\vec{x}) \\ H(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\vec{b}) \\ H(\vec{b}) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Після побудови квантового стану, що відповідає матриці Φ , виконується алгоритм QPE над оператором $U = \exp(i\Phi t)$. Це забезпечує отримання фазових зсувів, за якими обчислюються кути приходу сигналу $\theta_k = \arg(\lambda_k)$. Таким чином, ННЛ забезпечує обчислення матриці Φ , а QPE — її спектральний аналіз, що разом надає можливість реалізувати повноцінний квантовий аналог алгоритму ESPRIT.

Для порівняння обчислювальної складності класичного та квантового варіантів алгоритму ESPRIT представлено **таблицю** з характеристиками їхніх етапів. Тут видно, що на відміну від класичних підходів, які потребують значних обчислювальних ресурсів при обробленні великих антенних решіток або великої кількості вимірювань, квантові обчислювальні моделі забезпечують виконання ключових етапів аналізу зі значним прискоренням.

Складність основних етапів реалізації алгоритму ESPRIT у класичному та квантовому варіантах

Етап алгоритму	Класичний варіант		Квантовий варіант	
	операція	складність	операція	складність
Оцінка коваріаційної матриці	$R = E[XX^H]$	$O(M^2)$	кодування у квантовий стан	$O(1)$
Розклад за сингулярними значеннями (SVD)	$R = U\Sigma U^H$	$O(M^3)$	класичне виконання	$O(M^3)$
Виділення сигналового підпростору	вибір перших d векторів: U_s	$O(Md)$	кодування U_s у квантовий регістр	$O(\log M)$
Формування підматриць Ψ_1, Ψ_2	зсув елементів підпростору		квантове формування	
Обчислення $\Phi = \Psi_1^{-1}\Psi_2$	інверсія та множення	$O(d^3)$	ННЛ: розв'язання $\Psi_1 x = \Psi_2[:, k]$	$O(\text{poly}(\log M))$
Обчислення власних значень Φ	$\lambda_k = \text{eigen}(\Phi)$		QPE над $\exp(i\Phi t)$	
Оцінка DOA з фаз	$\theta_k = \arg(\lambda_k)$	$O(d)$	видобування фази з квантового регістра	$O(\log M)$

Інтерпретація фазових зсувів, точність і неоднозначність

Перетворення фазових зсувів у кутові координати

Після застосування QPE до унітарного оператора $U = \exp(i\Phi t)$ отримуються оцінки фазових зсувів, які відповідають власним значенням матриці $\Phi = \Psi_1^{-1}\Psi_2$. У класичному алгоритмі ESPRIT ці фази інтерпретуються як просторові зсуви, спричинені різницею між фазами антен.

В одновимірному випадку лінійної антенної решітки фазовий зсув лінійно залежить від кута приходу сигналу

$$\theta_k = \frac{2\pi d}{\Lambda} \sin(\gamma_k) \Rightarrow \gamma_k = \arcsin \frac{\Lambda \theta_k}{2\pi d}, \quad (12)$$

де d — міжелементна відстань;

Λ — довжина хвилі;

γ — азимутальний кут.

Для двовимірної або тривимірної решітки кутові координати визначаються у вигляді пари (азимут, елевация) з використанням більш складних залежностей. Таким чином, квантова частина алгоритму виконує обчислення власних фазових зсувів, а перетворення у фізичні кути здійснюється класичним способом, використовуючи геометричні параметри антенної системи.

Вплив точності фази на точність DOA

Точність оцінки фазового зсуву $\delta\theta$, яку надає алгоритм QPE, критично впливає на точність визначення кутової координати $\delta\gamma$. Залежність між ними наближається до

$$\cos(\gamma) \cdot \delta\gamma \approx \frac{\Lambda}{2\pi d} \cdot \delta\theta. \quad (13)$$

З цієї формули видно, що:

— чим ближче кут γ до 90° , тим більше похибка;

— кількість кубітів n у QPE визначає точність як $\delta\theta \approx 1/2^n$.

— чим більша кількість кубітів у фазовому регістрі, тим менша $\delta\theta$.

Це створює компроміс між глибиною квантового кола та точністю оцінювання напрямку.

Фазова неоднозначність і її вирішення

Алгоритм QPE оцінює фазу θ_k по модулю 2π , тобто всі значення належать інтервалу $[0; 2\pi)$. Така властивість призводить до неоднозначності, коли справжній фазовий зсув перевищує π або має кратність 2π . Це аналогічно класичній проблемі фазового розгортання. Для її вирішення існують два основних підходи.

Класичне фазове розгортання застосовується як постпроцесинг після квантових вимірювань. Це класичний алгоритм, що дозволяє відновити неперервне значення фази з її модульованого вимірювання в інтервалі $[0; 2\pi)$, усуваючи неоднозначності, пов'язані з фазовими зсувами, більшими за π . У контексті QPE цей метод застосовується після вимірювання для точного перетворення фази у значення кутових координат.

Використання декількох масштабів оператора полягає у застосуванні кількох унітарних операторів $U = \exp(i\Phi t)$ з різними масштабними коефіцієнтами t . Це дозволяє розв'язати проблему невизначеності фази, яка виникає при вимірюванні фазового зсуву лише в межах інтервалу $[0; 2\pi)$. Суть методу полягає в тому, що використовується лише один масштаб, і фазове значення можна оцінити лише з точністю до кратності $2\pi k$. Це призводить до отримання кількох DOA, які відрізняються на певний період. Щоб уникнути цієї неоднозначності, вимірювання виконуються при двох або більше значеннях t . Наприклад: виконано два оцінювання фази й отримано $\phi_1 = \theta_1 \bmod 2\pi$ при t_1 та $\phi_2 = \theta_2 \bmod 2\pi$ при t_2 . Знаючи t_1, t_2 і значення ϕ_1

та ϕ_2 , можна відновити істинну фазу θ (яка пов'язана з DOA), знявши неоднозначність за допомогою методу китайської теореми про залишки. Це дозволяє уникнути похибки у визначенні кута, якщо зсув фази вийшов за межі $[0; 2\pi)$.

Ці підходи дозволяють обробити великі фазові зсуви із забезпеченням коректного визначення DOA навіть у складних сценаріях.

Числовий приклад перетворення фази в кут

Розглянемо приклад перетворення фазового зсуву, отриманого квантовим способом, у фізичну просторову координату.

Для оціненої фази $\theta = \pi/3 \approx 1,047$ рад при довжині хвилі $\Lambda = 0,1$ м та міжелементній відстані $d = 0,05$ м згідно з формулою (12) маємо

$$\gamma = \arcsin(0,1 \cdot 1,047 / (2\pi \cdot 0,05)) = \arcsin 0,333 \approx 0,34 \text{ рад} = 19,47^\circ.$$

Висновки

Аналіз обчислювальної складності класичних та квантових підходів до задачі оцінки напрямку приходу сигналу, зокрема алгоритмів MUSIC та ESPRIT, показав, що основною обмежувальною ланкою класичних алгоритмів є етапи, пов'язані з розкладанням матриць та інверсією, складність яких зростає кубічно зі збільшенням кількості антенних елементів M . Запропонована інтеграція квантових алгоритмів QFT, QPE, HHL у структуру ESPRIT забезпечує поліномічну залежність $O(\text{poly}(\log M))$ обчислювальної складності ключових операцій від M замість класичної кубічної $O(M^3)$.

Представлені результати демонструють потенційні переваги використання квантових обчислень у задачах радіомоніторингу. Квантові підходи не лише зменшують часові та ресурсні витрати, а й забезпечують нову якість обробки сигналів у складних умовах, наприклад при великій кількості антен, слабкому рівні сигналу або частковій корельованості джерел, практично недосяжну для класичного MUSIC без спеціалізованого апаратного прискорення. У цьому контексті поєднання класичних методів оцінки DOA з квантовими прискорювачами виглядає перспективним напрямом подальших досліджень.

Проведене дослідження, попри відсутність повноцінної практичної реалізації, закладає теоретичну основу для майбутньої реалізації квантового ESPRIT в умовах реального часу, як тільки будуть подолані

технічні обмеження. У подальших дослідженнях планується поглиблений теоретичний аналіз квантової моделі ESPRIT та її апробація на квантових емуляторах.

ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Nan H., Ma X., Han Y., Sheng W. A computationally efficient MUSIC algorithm with an enhanced DOA estimation performance for a crossed-dipole array. *Sensors*, 2025, vol. 25, iss. 11, 3469. <https://doi.org/10.3390/s25113469>
2. Kulkarni S., Thakur A., Soni S. et al. A comprehensive review of direction of arrival (DoA) estimation techniques and algorithms. *Journal of Electronics and Electrical Engineering*, 2025, vol. 4, iss. 1. <https://doi.org/10.37256/jee.4120255708>
3. Salman M.B., Björnson E. DoA Estimation using MUSIC with Range/Doppler Multiplexing for MIMO-OFDM Radar. arXiv preprint arXiv:2506.13258, 2025. Available: <https://arxiv.org/abs/2506.13258>
4. Wu L., Liu Z.M., Huang Z.T. Deep convolution network for direction of arrival estimation with sparse prior. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, vol. 26, iss. 11, pp.1688–1692. <https://doi.org/10.1109/LSP.2019.2945115>
5. Meng F.X., Yu X.T., Zhang, Z.C. Quantum algorithm for multiple signal classification. *Physical Review A*, 2020, vol. 101, iss. 1, 012334. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.012334>
6. Горбатий І. В., Усатий О. А., Цайтлер Б. М.. Порівняння сучасних алгоритмів визначення напрямку приходу радіосигналу. *Труди XXVI Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні інформаційні та електронні технології»*, Україна, Одеса, 2025, с. 8–9. Available: https://www.old.tkea.com.ua/siet/archive/2025/MIET_2025_08.pdf.
7. Zhou Q.Y., Wu J.W., Wang S.R. et al. Two-dimensional direction-of-arrival estimation based on time-domain-coding digital metasurface. *Applied Physics Letters*, 2022, vol. 121, iss. 18, 181702. <https://doi.org/10.1063/5.0124291>
8. Shmuel D.H., Merkofer J.P., Revach G. Et al. Deep Root-MUSIC: Towards data-driven Root-MUSIC DoA estimation. In: *Proc. IEEE ICASSP 2023*, pp.1–5. <https://doi.org/10.1109/ICASSP49357.2023.10096504>
9. Huang M., Li R., Zou Y. et al. A comprehensive review of metasurface-assisted direction-of-arrival estimation. *Nanophotonics*, 2024, vol. 13, iss. 24, pp.4381–4396. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2024-0423>
10. Wang J.W., Huang Z.A., Wan X. et al. Polarization and direction-of-arrival estimations based on orthogonally polarized digital programmable metasurfaces. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2023, vol. 56, iss. 46, 465001. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/acce91>
11. Horbatiy I., Usaty O. Investigation of spread spectrum signal analysis methods in modern communication systems. *Information and Communication Technologies in Electrical Engineering*, 2025, vol. 1, iss. 9, pp. 125–129. <https://doi.org/10.23939/ict2025.01.125>
12. Morales M., Singh A., Cao Y. Quantum Linear System Solvers: A Survey of Algorithms and Applications. arXiv preprint [arXiv:2407.05178], 2024. Available: <https://arxiv.org/abs/2407.05178>

Дата надходження рукопису
до редакції 20.05 2025 р.

QUANTUM APPROACH TO DIRECTION OF ARRIVAL ESTIMATION

Quantum approaches to signal direction of arrival (DOA) estimation are gaining significant attention in recent years due to their ability to overcome the computational bottlenecks faced by classical algorithms when scaling to large antenna arrays. Traditional high-resolution algorithms, such as MUSIC and ESPRIT, while powerful and widely used in practice, suffer from cubic computational complexity concerning the number of antenna elements, which significantly limits their practical application in real-time or large-scale systems, especially when high spatial resolution is required.

This paper explores how quantum computing methods can be integrated into classical DOA estimation frameworks to drastically reduce this complexity and enable efficient processing in scenarios that are otherwise computationally prohibitive. In particular, we analyze the application of the Harrow-Hassidim-Lloyd (HHL) algorithm for solving systems of linear equations and the Quantum Phase Estimation (QPE) algorithm for extracting phase information, both of which are essential computational steps in the ESPRIT algorithm.

These quantum procedures rely heavily on the Quantum Fourier Transform (QFT) and its inverse to convert phase-encoded quantum states into measurable outputs, enabling precise extraction of angular information from quantum registers. We further explain how the transformation of non-Hermitian complex matrices into Hermitian or real-valued block matrices allows quantum algorithms to process them efficiently using current theoretical models.

The paper provides a step-by-step breakdown of the quantum-enhanced ESPRIT pipeline and highlights how the reformulation of core matrix operations within the quantum domain offers exponential speedup under ideal conditions. A comparative analysis between classical and quantum versions of the ESPRIT algorithm is presented, supported by a complexity table and a discussion of practical implementation challenges. This work demonstrates that quantum-enhanced ESPRIT can maintain high estimation accuracy while enabling DOA analysis with antenna arrays exceeding one thousand elements. Such scalability would be impractical for classical approaches without massive computational resources or specialized hardware. As a result, the integration of quantum algorithms into signal processing opens a transformative pathway toward scalable and efficient DOA estimation in future radar, navigation, and communication systems.

Keywords: direction of signal arrival, MUSIC, ESPRIT, computational complexity, complex matrices, radio monitoring.

REFERENCES

1. Nan H., Ma X., Han Y., Sheng W. A computationally efficient MUSIC algorithm with an enhanced DOA estimation performance for a crossed-dipole array. *Sensors*, 2025, vol. 25, iss. 11, 3469. <https://doi.org/10.3390/s25113469>
2. Kulkarni S., Thakur A., Soni S. et al. A comprehensive review of direction of arrival (DoA) estimation techniques and algorithms. *Journal of Electronics and Electrical Engineering*, 2025, vol. 4, iss. 1. <https://doi.org/10.37256/jee.4120255708>
3. Salman M.B., Björnson E. DoA Estimation using MUSIC with Range/Doppler Multiplexing for MIMO-OFDM Radar. arXiv preprint arXiv:2506.13258, 2025. Available: <https://arxiv.org/abs/2506.13258>
4. Wu L., Liu Z.M., Huang Z.T. Deep convolution network for direction of arrival estimation with sparse prior. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, vol. 26, iss. 11, pp.1688–1692. <https://doi.org/10.1109/LSP.2019.2945115>
5. Meng F.X., Yu X.T., Zhang, Z.C. Quantum algorithm for multiple signal classification. *Physical Review A*, 2020, vol. 101, iss. 1, 012334. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.012334>
6. Horbatyi I. V., Usaty O. A., Tsaitler B. M. Comparison of modern algorithms for determining the direction of arrival of a radio signal. *Proc. of the 26th ISPC «Modern information and electronic technologies»*, Odesa, Ukraine, 2025, pp. 8–9. Available: https://www.old.tkea.com.ua/siet/archive/2025/MIET_2025_08.pdf/
7. Zhou Q.Y., Wu J.W., Wang S.R. et al. Two-dimensional direction-of-arrival estimation based on time-domain-coding digital metasurface. *Applied Physics Letters*, 2022, vol. 121, iss. 18, 181702. <https://doi.org/10.1063/5.0124291>
8. Shmuel D.H., Merkofer J.P., Revach G. Et al. Deep Root-MUSIC: Towards data-driven Root-MUSIC DoA estimation. In: *Proc. IEEE ICASSP 2023*, pp.1–5. <https://doi.org/10.1109/ICASSP49357.2023.10096504>
9. Huang M., Li R., Zou Y. et al. A comprehensive review of metasurface-assisted direction-of-arrival estimation. *Nanophotonics*, 2024, vol. 13, iss. 24, pp.4381–4396. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2024-0423>
10. Wang J.W., Huang Z.A., Wan X. et al. Polarization and direction-of-arrival estimations based on orthogonally polarized digital programmable metasurfaces. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2023, vol. 56, iss. 46, 465001. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/acce91>
11. Horbatyi I., Usaty O. Investigation of spread spectrum signal analysis methods in modern communication systems. *Information and Communication Technologies in Electrical Engineering*, 2025, vol. 1, iss. 9, pp. 125–129. <https://doi.org/10.23939/ictee2025.01.125>
12. Morales M., Singh A., Cao Y. Quantum Linear System Solvers: A Survey of Algorithms and Applications. arXiv preprint [arXiv:2407.05178], 2024. Available: <https://arxiv.org/abs/2407.05178>



Copyright: © 2025 by the authors. Licensee: Politekhperiodika, Odesa, Ukraine. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).